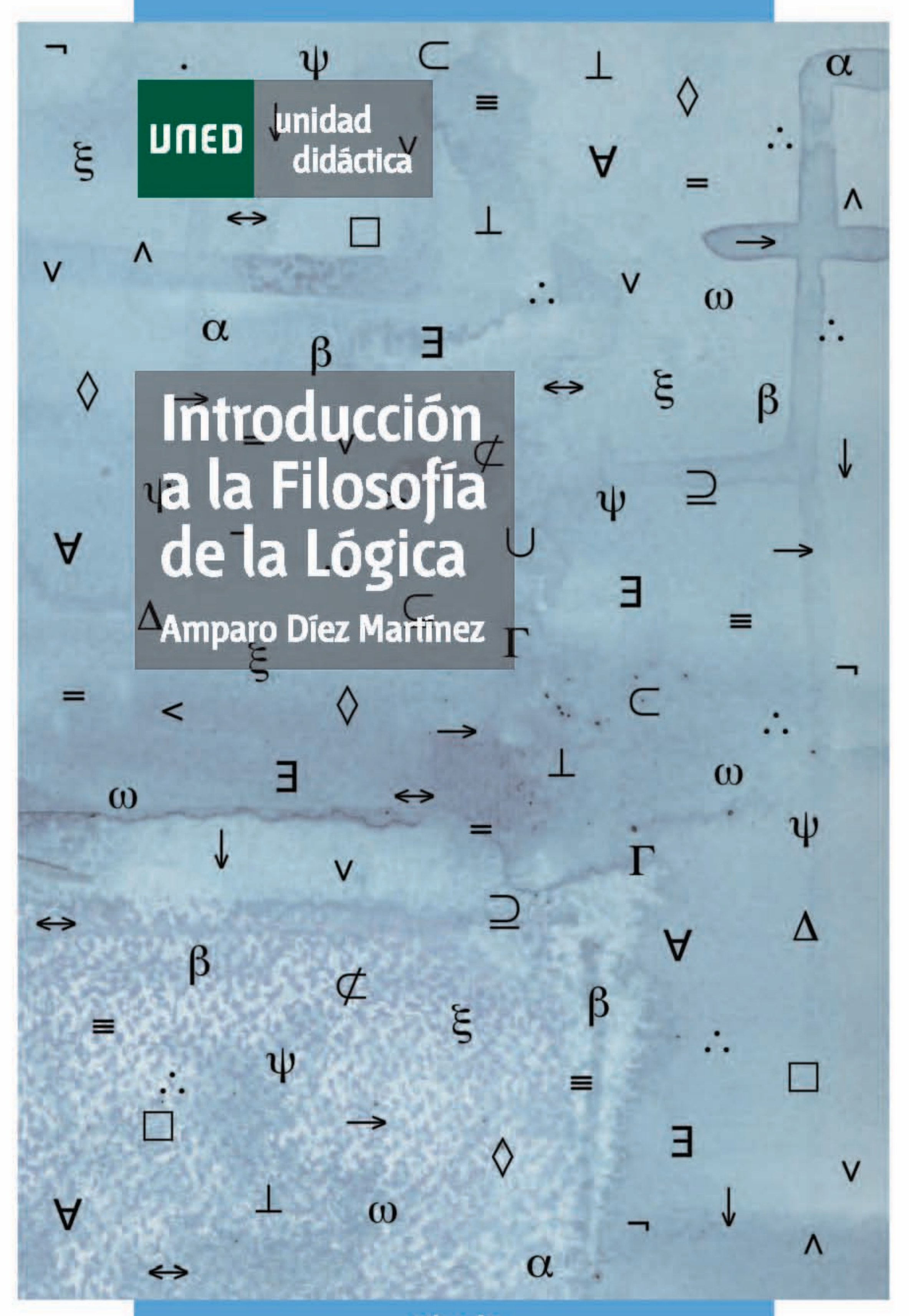
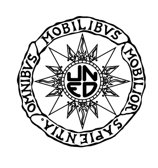

UNED
unidad didáctica
Introducción a la Filosofía de la Lógica
Amparo Díez Martínez
Filosofía

Amparo Díez Martínez

INTRODUCCIÓN A LA FILOSOFÍA DE LA LÓGICA



UNIVERSIDAD NACIONAL DE EDUCACIÓN A DISTANCIA

UNIDAD DIDÁCTICA
INTRODUCCIÓN A LA FILOSOFÍA DE LA LÓGICA

www.uned.es/publicaciones

ISBN electrónico: 978-84-362-6758-7

Edición digital: junio de 2013

ÍNDICE

PRESENTACIÓN

Este libro va dirigido a estudiantes de filosofía que han seguido ya un curso de lógica y se propone como texto básico para la asignatura de Filosofía de la Lógica. Por limitaciones de espacio y por el público al que va dirigido, resulta imposible discutir si quiera brevemente todas las cuestiones de una filosofía de la lógica. Hemos debido tomar una decisión acerca de cuáles son los temas a introducir y si vamos a tomar como punto de referencia los distintos sistemas lógicos que se han desarrollado hasta hoy o nos vamos a centrar en la lógica clásica como si ésta fuera *la* lógica genuina. Ni lo uno ni lo otro. Comenzamos con la lógica clásica, pero esto no significa que nos vayamos a quedar en ella, sino que reconocemos la existencia de otras lógicas, en cuya filosofía también estamos interesados.

Los temas desarrollados aquí están organizados en cuatro grandes apartados. En primer lugar, exploramos los posibles candidatos como portadores de verdad y examinamos las distintas teorías de la verdad que se han propuesto. En segundo lugar, analizamos la noción de forma lógica y presentamos las dos principales teorías del significado de las constantes lógicas; todo ello sin perder de vista su relación con el lenguaje natural. El tercer apartado está dedicado enteramente a cuestiones onto-semánticas: de qué estamos hablando cuando utilizamos un cuantificador, un nombre propio o una descripción definida, qué se afirma en una identidad y si debemos distinguir o no las nociones de existencia lógica y realidad. Finalmente en el cuarto y último apartado examinamos algunas cuestiones que favorecen el desarrollo de distintas lógicas (modal, trivalente, intuicionista y de la vaguedad) y las soluciones que se proponen a algunos problemas detectados en procesos argumentativos, es decir, en relación con la gestión y transmisión de información.

INTRODUCCIÓN

LÓGICA Y FILOSOFÍA DE LA LÓGICA

La lógica es una teoría de la validez formal de algunos argumentos, una teoría de la relación de consecuencia entre conjuntos de enunciados. No se limita a establecer formas argumentativas válidas, sino que también aspira a ser una explicación de dicha validez. Podemos hablar de la lógica, en singular, para referirnos a lo común a los distintos sistemas lógicos: son teorías de la relación de consecuencia debida únicamente a la forma. No se ha de entender, por tanto, que cuando usamos la expresión "la lógica" estamos presuponiendo que hay una única lógica correcta.

Quedan fuera de nuestra consideración las argumentaciones inductivas, pues aunque no es imposible una teoría de la corrección formal de las argumentaciones inductivas, en estas argumentaciones falta una de las características más importantes de la relación de consecuencia lógica: la *necesidad* de que la conclusión tenga cierta propiedad, si el conjunto de las premisas la tiene; en un argumento inductivo correcto, aunque las premisas fueran todas ellas determinada y absolutamente verdaderas (si podemos hablar así), la conclusión sería sólo muy *probablemente* verdadera. Es decir, las teorías de la corrección de la argumentación inductiva son dependientes de alguna teoría de la probabilidad. No entramos en la discusión acerca de si hay o puede haber una lógica inductiva; en cualquier caso, lo que entendemos por "lógica formal" es una teoría de la validez de algunas argumentaciones *deductivas*.

La filosofía de la lógica es principalmente *filosofía*. Comenzaremos con una reflexión sobre la lógica *clásica* porque, antes de discutir la posibilidad de la existencia de distintos cálculos lógicos no reducibles a uno y

el significado filosófico que este hecho pudiera tener, conviene examinar aquella lógica que ha sido más estudiada, en torno a la cual se han planteado la mayor parte de los problemas filosóficos y relativamente a la cual decimos que hay o no *otras* lógicas. No reduciremos nuestro estudio a la lógica clásica, pero ésta será en general nuestro punto de referencia para introducir algunos problemas filosóficos importantes, que en el contexto de la lógica se presentan como especialmente relevantes, ya sea para el desarrollo mismo de la lógica, ya sea porque se manifiestan en ella como problemas filosóficos básicos que afectan a nuestra comprensión del lenguaje, del conocimiento o del mundo, por ejemplo: ¿por qué decimos que es válida una inferencia?, ¿qué relación hay entre la corrección intuitiva de un argumento deductivo y la corrección lógica de su contrapartida formal?, ¿qué es una forma lógica?, ¿son las reglas del cálculo normativas o descriptivas?, ¿qué es una identidad?, ¿cuáles son los compromisos ontológicos de un cálculo?, ¿qué relaciones hay entre las nociones de posibilidad, necesidad e imposibilidad?, ¿qué parte de la teoría del lenguaje formal se podría aplicar también a los lenguajes naturales?, ¿cuáles son las principales categorías gramaticales, semánticas y ontológicas?, ¿cuáles son las expresiones lógicas y cuál es su significado?, ¿qué relación guardan con el lenguaje natural?, ¿cuál es la forma lógica de una descripción definida?, ¿cuáles son sus condiciones de uso?, ¿qué propiedades lógicas se aplican a enunciados?, ¿cuáles a esquemas enunciativos o fórmulas?, ¿cuáles a conjuntos de enunciados y conjuntos de esquemas enunciativos?, ¿cuáles a esquemas argumentativos?, ¿qué son las verdades lógicas?, ¿son necesarias?, ¿es la verdad la noción central de la lógica?, ¿definimos la derivación en términos de verdad y validez o podemos caracterizar una lógica como un cálculo, especificando reglas de inferencia, sin hacer uso de ninguna noción semántica?, ¿es la lógica un cálculo de consecuencias sintácticas o una axiomática de verdades?, ¿regula la prueba lo que tomamos como verdadero o regula la verdad lo que aceptamos como prueba?, etc. En estas últimas preguntas se condensa la rivalidad entre las concepciones semanticista y sintacticista de la lógica. Se han dado básicamente dos respuestas a la pregunta sobre qué es una lógica; una (realista) basada en nociones semánticas como la de verdad y la otra (antirrealista) basada en nociones sintácticas como la de prueba.

Según el criterio semanticista, una lógica viene caracterizada como un conjunto de verdades que son analíticas y, por tanto, *a priori* y necesarias. Decimos que un argumento deductivo correcto consta de un conjunto de premisas (o hipótesis auxiliares), una conclusión y un nexo (relación de consecuencia) entre las premisas y la conclusión tal que no es posible que las premisas sean verdaderas y la conclusión falsa, el condicional entre la

conjunción de las premisas y la conclusión es un condicional válido, una verdad lógica, una tautología, una *implicación*. Cuando el argumento no tiene propiamente premisas, sino únicamente hipótesis auxiliares que se cancelan antes de construir la conclusión, obtenemos no sólo una argumentación correcta, sino también una conclusión *válida*. Pero ¿qué entendemos por *validez*?, ¿qué significa ese "no es posible que"? A veces se explica la noción de *necesidad lógica* acudiendo a la de analiticidad, pero la distinción entre lo analítico y lo sintético no está nada clara, como ha puesto de manifiesto Quine, quien asegura que no existe ningún criterio objetivo para su aplicación. Es mejor explicar las nociones lógicas de verdad y necesidad no mediante la de analiticidad, sino mediante la noción de *forma*, y relativizar la validez de una forma argumentativa a alguna lógica: si *dentro de un sistema lógico S*, en el que estamos llevando a cabo la evaluación de un argumento, no es posible adscribir verdad a las premisas y falsedad a la conclusión, decimos que el argumento es válido en S, que hay relación de necesidad entre premisas y conclusión, que el condicional que une el conjunto de las premisas con la conclusión es una implicación lógica. Una vez diseñada una lógica S, queda determinado el conjunto de las expresiones que pertenecen a su lenguaje y tienen algún significado (qué cuenta como fórmula bien formada en S), así como el subconjunto de las expresiones que son verdades lógicas en S. Podemos distinguir la necesidad de las verdades empíricas, relativas a teorías científicas particulares, de la necesidad debida a la *forma* de las expresiones. Esta necesidad formal o lógica no significa sino que la expresión tiene alguna de las formas seleccionadas en S como válidas o puede ser reducida (mediante las reglas de transformación de S) a un encadenamiento de esquemas lógicos válidos. Una verdad no es necesaria de un modo absoluto, sino *relativamente a alguna teoría*.

Ahora bien, todavía podemos seguir preguntando por qué es (relativamente) *válido* un esquema formal. En última instancia hemos de recurrir a la intuición: los argumentos que tienen la forma del Modus Ponens, por ejemplo, se nos presentan como incontestables, reconocemos en ellos un lazo necesario entre la verdad de las premisas y la de la conclusión, y cada uno de los esquemas deductivos básicos de una lógica S se nos presenta como algo *evidente*. Si el sistema nos proporciona medios para reducir una forma deductiva a un encadenamiento de deducciones básicas (intuitivamente válidas), también la validez de esos argumentos más complejos, más alejados de la intuición, descansan finalmente en lo *intuitivamente* válido. Y sin embargo, tropezamos desde el inicio con el problema de que la aplicación reiterada del Modus Ponens en ciertos contextos nos puede llevar de premisas verdaderas a conclusiones falsas.

¿No estaremos presuponiendo más verdades de las confesadas, por ejemplo: que las premisas de un argumento se adecúan siempre al principio de bivalencia? ¿Es la lógica bivalente *la* lógica correcta?, ¿hay una única lógica bivalente?

Según el criterio sintacticista, una lógica es un sistema deductivo con ciertas propiedades meta-teóricas. Consideremos las siguientes propiedades de teorías:

Consistencia: Un sistema *S* es consistente si, para toda fórmula α, no puede ocurrir que (α ∧ ¬α) sea un teorema de *S*.

Completud: Un sistema *S* es completo cuando toda verdad lógica de *S* es un teorema de *S*, es decir, *S* tiene capacidad para probar todas las verdades lógicas de *S*.

Corrección: Un sistema *S* es correcto cuando todas las fórmulas deducibles de un conjunto de premisas son consecuencias semánticas de dichas premisas y todas las fórmulas deducibles sin premisas son verdades lógicas de *S*, es decir, todo teorema de *S* es una verdad lógica de *S*.

Compacidad o *finitud*: Sea Γ un conjunto infinito cualquiera de fórmulas de *S*. Si cada subconjunto finito Δ ⊂ Γ es satisfacible, entonces Γ también es satisfacible, y si α es una consecuencia semántica de Γ, entonces también lo es de algún subconjunto finito Δ de Γ. Dicho en términos sintácticos: toda derivación de una fórmula de *S* es finita.

Decidibilidad: Un sistema S es decidible cuando existe un método mecánico finito para determinar si, para toda fórmula α de S, α es una verdad lógica de S o no, si α es un teorema de *S* o no.

Löwenheim-Skolem: Si un conjunto de fórmulas de *S* tiene algún modelo infinito, entonces tiene modelos de cualquier cardinalidad (finita o infinita numerable o no numerable).

¿Cuántas y cuáles de estas propiedades ha de tener un sistema *S* para que podamos decir que *S* es una lógica? ¿Hay alguna relación entre estas propiedades y las características de las verdades lógicas? Se ha señalado que la lógica proposicional, que es decidible, es la lógica más formal, sin ningún contenido, mientras que lógicas superiores no decidibles (primer orden) y lógicas no decidibles e incompletables (segundo orden) van ganando contenido. No podemos entrar aquí en los detalles de estas discusiones, para lo cual necesitaríamos tratar no sólo con los conceptos de decidibilidad y completud, sino también con cuestiones sobre subconjuntos decidibles de sistemas indecidibles, poder expresivo de una lógica, etc., y, después de todo, las justificaciones para decidir si un sis-

tema *S* es un sistema lógico en términos de qué propiedades satisface terminan siendo filosóficas.

Las propiedades meta-teóricas no proporcionan por sí mismas un criterio de demarcación. A fin de cuentas la lógica establece algunas verdades demostrándolas, descansa en cierta relación entre verdad (semántica) y prueba (sintaxis). La lógica consigue establecer que un cierto argumento es válido, que la verdad de las premisas (si la hay) se transmite necesariamente a la conclusión, porque en los enunciados utilizados en el argumento figuran algunas expresiones con un estatus especial, con un significado que la lógica trata de representar mediante las constantes lógicas. Pero la explicación de la lógica como una teoría deductiva con ciertas propiedades meta-teóricas presupone dadas las constantes lógicas y deja sin explicar la logicidad de los sistemas seleccionados. Parece que no podemos decidir qué es una lógica antes de decidir qué es una constante lógica. ¿Significa esto que las constantes lógicas son elegidas por convención y la convención puede ser arbitraria? No. De hecho, una teoría deductiva T capaz de demostrar todas las afirmaciones expresables en T no es una teoría lógica. Decir que no hay criterios objetivos claros para determinar la lista completa de las expresiones lógicas no significa que podemos elegir las que queramos.

Los sintacticistas tienen que aceptar que no se pueden introducir constantes que no conserven la consistencia del sistema, es decir, que no podemos prescindir de toda noción semántica en la explicación de qué es una lógica, que las reglas de uso utilizadas para dar el significado de una nueva constante en un sistema han de sujetarse a la condición de que preserven la verdad en todas las deducciones en las que puedan ser aplicadas.

Según Peacocke[1], las reglas básicas regulan el uso de cada constante, pero esto no quiere decir que nos den sólo sus condiciones de afirmación, sino que también nos dan sus condiciones de verdad. Una regla básica se nos presenta como *obvia* porque reconocemos en ella que la conclusión siempre será verdadera si las premisas lo son. Es por eso que decidimos tomarla como *norma*, como modelo deductivo; de modo que los teoremas no son necesarios porque expresen verdades transcendentes, sino porque se pueden probar mediante un encadenamiento de deducciones básicas obvias que se han aceptado como normas.

---

[1] PEACOCKE, C. (1976): "What is a Logical Constant", *The Journal of Philosophy* **73**: 221-40.

MÁS ALLÁ DE ESTE LIBRO

Un tema importante de filosofía de la lógica que tampoco podemos desarrollar aquí es la cuestión acerca de si hay o habrá una única lógica correcta, que está en la base de todo otro sistema lógico posible. Un estudio adecuado de las posibles respuestas a esa pregunta sólo puede llevarse a cabo después de haber analizado los temas que aquí presentamos, pero también *después de* habernos familiarizado más con las distintas lógicas existentes y su filosofía. Según A. Deaño, hay una única lógica (ideal) porque hay una única *forma* de nuestra *forma* de conocer; pero esta es una afirmación falaz, en la que se presupone que la expresión "*la* forma del conocimiento en general" tiene una denotación. Quizás estamos tratando de nombrar algo que no es único como si lo fuera. ¿Y si hay una pluralidad de *formas* de nuestras *formas* de conocer?

La respuesta que demos a la pregunta sobre la unicidad de la lógica nos comprometerá con una determinada posición filosófica. Hay dos concepciones generales, que podemos llamar "realismo platónico o metafísico" y "relativismo", según se responda afirmativa o negativamente a la cuestión. Dependiendo de las razones que se den para la respuesta en términos de "sí" o "no", iremos matizando esas dos posiciones añadiendo algunos otros compromisos filosóficos más concretos.

Un esquema general de las posibles respuestas es el siguiente:

1. Realismo platónico: sí, hay o habrá una única lógica, que es *la lógica genuina*. El lógico no crea, sino que descubre el universo lógico y sus leyes. Reconocer y seguir las leyes lógicas es signo de racionalidad.
   1.1. Conservador: la lógica correcta es la lógica clásica.
   1.2. Revisionista: la lógica correcta es una lógica no-clásica.
2. Relativismo: no hay ni habrá una única lógica correcta, sino que son posibles distintas lógicas igualmente correctas o aceptables. Las verdades lógicas sólo expresan convenciones lingüísticas. Una verdad (lógica o empírica) es reducible a una convención sobre el uso de los signos.
   2.1. Convencionalista moderado, pluralista: una lógica S es buena relativamente a un dominio de aplicación o a un conjunto de conocimientos o creencias.
   2.2. Convencionalista radical, instrumentalista: ninguna lógica es correcta ni incorrecta, sino más útil o menos útil que otra.

El convencionalismo radical es insostenible. Es lo que muestra L. Carroll[2] en el diálogo entre Aquiles y la tortuga, cuando la tortuga quiere reducir las reglas lógicas a verdades convencionalmente aceptadas: por mucho que reiteremos la transformación de una aplicación del Modus Ponens en una verdad lógica y la añadamos al conjunto de las premisas de un argumento, seguiremos necesitando aplicar la regla para extraer la conclusión. Supongamos que alguien no acepta el paso de las premisas p y $p \to q$ a la conclusión q, aunque está dispuesto a aceptar, por convención, $(p \land (p \to q)) \to q$. Esta ley, unida a las premisas, no nos ayuda a extraer q, a menos que aceptemos el Modus Ponens *como regla*.

También Quine, a quien podemos incluir entre los pluralistas, rechaza el convencionalismo radical tanto como el platonismo. Según Quine, ninguna regla lógica se puede justificar acudiendo a un conjunto finito de convenciones. Las verdades lógicas, expresadas en un lenguaje *L*, no las descubrimos en el sentido realista, pero tampoco las inventamos, sino que se nos imponen por la práctica general del lenguaje *L* al que pertenecen: ninguna expresión de *L* tiene un significado separado, sino que su significado depende del uso (significado) de otras expresiones de *L*. Igualmente, ninguna inferencia necesita ni puede tener una justificación separada, sino en el contexto de todas las inferencias aceptadas como correctas en una teoría *T*. Esta posición holista va unida a un escepticismo sobre las nociones de analiticidad y necesidad y al rechazo tanto del realismo metafísico como del instrumentalismo. La lógica está tan en el centro de nuestro sistema de creencias o conocimientos, dependen de ella tantas otras afirmaciones pertenecientes a otras teorías, que difícilmente será revisada, pero cualquier afirmación y cualquier regla de cualquier teoría puede, en principio, ser revisada cuando nuestro sistema de creencias entra en conflicto con la experiencia.

Quine sostiene que 1) todos los principios lógicos son revisables, y 2) las llamadas lógicas alternativas a la lógica clásica no son sino un cambio de tema, su rivalidad con la lógica clásica es sólo aparente. Si alguien aceptara como verdadero algo de la forma $(\alpha \land \neg \alpha)$, "¬" no significa lo mismo que la negación clásica, de modo que no puede entrar en conflicto con la no contradicción lógica clásica. La revisión parcial es posible, la radical no.

Engel también critica el realismo metafísico, pero no quiere renunciar a un realismo mínimo que se manifiesta en nuestro propio uso del término "verdadero". Usamos una noción de verdad transcendente: la verdad

[2] Cfr. CARROLL, L. (1996): 153-8.

depende de cómo son las cosas por lo menos tanto como de cómo son nuestros lenguajes y teorías. Esta posición de Engel, que me parece la más acertada, se compromete exactamente con la negación de las dos tesis quineanas: 1) no todos los principios lógicos son revisables, y 2) no es verdad que la rivalidad entre la lógica clásica y otras lógicas es sólo aparente.

I
VERDAD Y PORTADORES DE VERDAD

1. ¿DE QUÉ TIPO DE ENTIDADES PREDICAMOS LA VERDAD?

En los textos de lógica podemos encontrar una variedad de denominaciones de las fórmulas atómicas “*p*”, “*q*”, etc.; a la hora de definir el alfabeto de un lenguaje formal no hay un acuerdo general sobre cómo denominar esos primitivos lingüísticos, se habla de “letras enunciativas”, de “variables enunciativas”, de “constantes enunciativas”, de “variables proposicionales” o de “constantes proposicionales”. Al sistema lógico definido nos referimos indistintamente con las expresiones “lógica de enunciados” y “lógica proposicional”. ¿Cuáles son las contrapartidas en los lenguajes naturales de las “*p*”, “*q*”, etc. del lenguaje formal? Queremos saber cuáles son los portadores de verdad (semántica) y de qué tipo son esas entidades (ontología).

1.1. Afirmación, oración, enunciado y proposición

Una vez que aceptamos generalmente que la verdad es algún tipo de predicado, tenemos que aclarar de qué predicamos la verdad. Hay una variedad de teorías acerca de cuáles son los portadores de verdad: Davidson ha defendido que son las *oraciones-caso*, según Strawson sólo de algunas *afirmaciones* predicamos la verdad, según Barwise y Perry hemos de hablar de *situaciones* y, en fin, la propuesta clásica de Frege es que son las *proposiciones* las que pueden ser verdaderas o falsas, entendidas como el contenido que puede ser expresado en una oración declarativa que no contiene predicados vagos ni términos sin denotación ni deícticos. Quine niega la existencia de proposiciones y de toda entidad intensional. Ramsey se libra del problema declarando que la verdad no es un predicado genuino, recoge la idea de que la verdad en posición predicativa es redundante y concluye de esto que podemos prescindir de ella.

La primera dificultad que encontramos para comprender las diferentes propuestas que se han presentado es la falta de acuerdo en cuanto al significado con el que se usan las expresiones “oración”, “enunciado”, “proposición” y “afirmación”.

Una oración es una entidad lingüística. Hay oraciones interrogativas, desiderativas, afirmativas, negativas, etc. El diccionario de la Real Academia Española dice: “palabra o conjunto de palabras con que se expresa un sentido gramatical completo”. “¿Has apagado el horno?”, “¡Cierra la puerta!”, “No sé si Juan se ha ido al cine” son ejemplos de oraciones. “No sé ven”, “Increíble si has”, “Entonces es llueve”, no lo son. Al emitir una oración se realiza un acto de habla, se hace una jugada en el juego del lenguaje.

Si seleccionamos, en el conjunto de las oraciones, el subconjunto de las oraciones declarativas como aquellas que pueden emitirse con pretensión de verdad, independientemente de que su forma gramatical sea afirmativa o negativa, podemos convenir en llamar “enunciado” a cada elemento de ese subconjunto. Disponemos de muchos enunciados para expresar un mismo significado.

Ahora podemos seleccionar un subconjunto dentro del conjunto de enunciados: el subconjunto de los enunciados que no contienen términos no referenciales. Llamamos “proposición” al pensamiento expresado por cada uno de estos enunciados, es decir, ampliamos la noción fregeana para poder hablar también de pensamientos completos afirmados mediante oraciones que contienen predicados vagos, por ejemplo: “Algunos hombres son calvos”.

Las relaciones entre afirmación, oración, enunciado y proposición son bastante claras: un *enunciado* es un tipo de *oración* (noción lingüística), que expresa significados *afirmables* (noción psicológica) algunos de los cuales son *proposiciones* (noción ontológica).

La oración es la unidad lingüística mínima de significado, mediante la cual podemos transmitir un significado con fuerza interrogativa, o con fuerza desiderativa, etc., o, lo que a nosotros nos interesa, con fuerza asertiva. El significado de las palabras es derivado, no podemos entender ningún significado de ninguna palabra de la que no conozcamos alguno de sus posibles usos en alguna oración.

El enunciado se define a veces como el significado de las oraciones declarativas, pero esto da lugar a confusiones, pues los enunciados son entidades lingüísticas. Si acaso podremos hablar de *lo* enunciado en la oración. La cuestión es que hemos de distinguir la *entidad lingüística* utilizada para decir algo, de lo expresado mediante dicha entidad.

Una proposición podemos afirmarla como verdadera, pero también podemos preguntar por su valor de verdad, tomarla como objeto de creencia o considerarla como hipótesis de trabajo para una investigación o un cálculo.

Ejemplos de oraciones que no llegan a expresar un pensamiento completo:

(1) "Este libro tiene menos de 300 páginas"

El pensamiento expresado mediante esta oración es incompleto porque su sujeto queda determinado sólo gracias al contexto en el que es usada la expresión "este libro". Dicho de otro modo, el pensamiento expresado mediante el uso de esa oración en este contexto es uno completo, pero si encontramos la oración escrita, por ejemplo, en una pizarra, ya no sabemos qué significa. Podemos completar el pensamiento reconstruyendo la oración: "El libro *Introducción a la filosofía de la lógica*, editado por la UNED en 2005, tiene menos de 300 páginas".

(2) "Esta oración es falsa"

La oración (2) no sólo expresa un pensamiento incompleto, sino que además parece ser que expresa un pensamiento incompletable. Es uno de los ejemplos de la familia de las paradojas semánticas. Examinaremos una de sus versiones cuando hayamos visto la definición semántica de verdad.

(3) "El mayor de los números naturales es un número par"

En este caso nos encontramos con una oración que recibe dos distintas interpretaciones: la de Frege y la de Russell. Según Frege, el pensamiento expresado es incompleto porque se hace una predicación sobre nada (no existe un número natural que sea mayor que cualquier número natural), es una oración que no tiene ningún valor de verdad. Según Russell, ese enunciado dice que hay un único número natural mayor que cualquier otro número natural y es un número par, lo cual es un pensamiento completo que es falso. La cuestión discutible es la de si las descripciones definidas afirman la existencia de su referencia (Russell) o sólo la presuponen (Frege); ¿todos los usos posibles de "existe un único número natural mayor que cualquier otro número natural y es un número par" coinciden con los usos posibles de "el mayor de los números naturales es un número par"?

Strawson[3] distingue entre oración, uso y emisión: dos personas hacen dos emisiones de una oración con igual o distinto uso. Uno de los usos posibles es la *afirmación*, al afirmar una oración estamos usando la ora-

[3] Cfr. STRAWSON: "Sobre el referir", en Valdés (ed.) (1999): 57-82.

ción para *decir algo*. Son algunas afirmaciones las que son verdaderas o falsas, y si una afirmación es verdadera, no puede dejar de serlo. Pero una afirmación sobre un objeto inexistente no es ni verdadera ni falsa.

Las oraciones enunciativas que contienen deícticos también son usadas para decir algo, para hacer aserciones, pero en estos casos la dependencia del contexto de emisión es clara. ¿Hemos de concluir que esas oraciones son enunciados que expresan pensamientos distintos en emisiones diferentes? En un sentido sí y en otro sentido no. Son oraciones que pueden expresar pensamientos diferentes en emisiones diferentes, pero no expresan ningún pensamiento completo por sí mismas, sino que es el conocimiento compartido por los presentes en la emisión lo que permite completar el pensamiento parcial expresado en la oración. Podemos transformar la oración utilizada en una equivalente cuyo significado no dependa del contexto de emisión, una vez determinada la referencia del deíctico en ese uso particular. Con esto conseguimos un enunciado útil para expresar un mismo pensamiento con independencia del contexto de su emisión.

Pero las críticas de Quine a la idea de sinonimia y su rechazo de los significados como entidades, dado que no tienen criterios claros de identidad, refuerzan la tesis de que no necesitamos entidades intensionales para explicar nuestros usos de la expresión "es verdadero que" y propician posiciones lingüísticas extremas.

1.2. Oraciones-tipo y oraciones-caso

Un modo de evitar la postulación de entidades intensionales es afirmar que los portadores de verdad son ciertas entidades lingüísticas: las oraciones-caso. Las únicas entidades que existen son las oraciones-caso, entidades concretas espacio-temporales: las emisiones orales o escritas de oraciones. Oración-tipo, enunciado, afirmación y proposición son nociones abstractas. Pero esta propuesta tropieza desde el principio con importantes dificultades. Consideremos las siguientes oraciones:

(1) Llueve

(2) Llueve

(3) Es regnet

(4) *Llueve*

(5) El actual rey de Francia es calvo

(1) y (2) son distintas entidades físicas con la misma forma gráfica, son *dos* oraciones-caso de la *misma* oración-tipo, pero con (3) tenemos un

problema: parece que no puede pertenecer al mismo tipo que (1) y (2). En cuanto a (4) ¿es del mismo tipo que (1)? ¿Cuáles son los criterios de identidad de una oración-tipo?, ¿cuáles son los criterios de identidad de una oración-caso?, ¿cuánto dura una oración-caso?, ¿cuánto y cómo puede variar el contexto sin vernos obligados a decir que ya no estamos en el mismo caso?, ¿puede un portador de verdad mudar de valor o carecer de él? Y si fueran las oraciones-tipo las que pueden ser verdaderas o falsas y tomáramos (5) como caso de una oración-tipo, tendríamos que decir que la oración-tipo es verdadera en un tiempo (en unos casos), falsa en otro y carece de valor en otro tiempo, lo cual la invalida como portador de verdad.

La semántica de situaciones parte de la idea de que efectivamente predicamos la verdad de las oraciones, pero las oraciones no son los portadores de verdad de un modo absoluto, sino *relativamente* a un contexto. La verdad se aplica a un par ordenado <*p*, *C*> donde "*p*" es una oración y "*C*" un contexto. Si *p* es verdadera en *C*, no puede dejar de serlo.

Pero, podemos objetar, hablamos también de oraciones que tienen significados vagos o distintos significados en distintas situaciones. Relativizar cada oración *p* a las circunstancias que la hacen verdadera no nos libra de las nociones intensionales. Las soluciones que se proponen para solventar esta dificultad es modificar los componentes del portador de verdad, no se trataría de un par, sino de una tupla de cuatro elementos: <*p*, *C*, *L*, *s*>, donde "*L*" es un lenguaje y "*s*" un significado. Pero ahora tenemos un portador de verdad bastante complejo y no menos abstracto que la noción de proposición. Para este viaje no necesitábamos tantas alforjas. Hemos rechazado la proposición por ser una entidad abstracta y ahora tenemos un portador bastante complejo que, además, incluye entidades del tipo que queríamos evitar, como la de significado.

Asumiendo una cierta tolerancia ontológica, Orayen trata de justificar la idea de que los portadores de verdad son las oraciones-caso. Para ello necesita asegurarse de que existen los significados (sean lo que sean) y convenir que está fijada la referencia de todas las partes de la oración. "Quizás existan proposiciones y afirmaciones, pero estamos *muchísimo más seguros* de la existencia de los enunciados"[4]. En principio considera que las proposiciones son buenos candidatos para ser los portadores de verdad, pero es menos comprometido asignar la verdad a las oraciones-caso. Puede ser que esta asignación sea derivada de la proposición que expresan, pero las nociones de significado y proposición son demasiado abstractas para poder identificarlas.

[4] ORAYEN, R. (1989): 55.

Si una oración-caso afirma algo verdadero o falso, podemos aplicar ese valor de verdad a la oración-caso. ¿Qué pasa si hay varias ocasiones de uso? ¿El valor de verdad se asocia a una oración-caso concreta emitida una sola vez? ¿Y qué pasa si tiene un significado ambiguo (aún estando presupuesto el lenguaje al que pertenece)? Se le asigna, según Orayen, ¡el valor veritativo del significado que intentó afirmar el emisor! Otra vez tropezamos con la noción abstracta de significado, pero ahora haciéndola depender de la competencia del emisor. Otra salida a esta dificultad es decir que el valor de verdad se asigna a la disyunción de oraciones que expresan cada uno de los significados posibles. Pero ¿la disyunción se establece entre significados o entre oraciones? Si es entre oraciones, esas oraciones no son la oración-caso original. Orayen necesita usar no sólo la expresión "significado", sino también las de "igual significado", "distinto significado", "emisor real", "emisor intelectual", etc.

Aceptando que el conjunto de los portadores de verdad ha de cumplir las dos condiciones mínimas generalmente aceptadas: 1) que sus miembros no deben mudar de valor, y 2) que todos sus miembros deben tener valor de verdad, Orayen determina, mediante definición, que los portadores de verdad son una subclase de las oraciones-caso: las oraciones-caso que son verdaderas o falsas. Nos propone que aceptemos que

(1) la noción de oración gramatical y la distinción entre oración-caso y oración-tipo son suficientemente claras,

(2) "verdadero" y "falso" son primitivos semánticos, y

(3) "verdadero" y "falso" se aplican a oraciones (no a todas) y necesitamos aplicar "verdadero" y "falso" también a oraciones-caso que no están afirmadas.

Además convenimos que

(*a*) "Oración-caso" no se aplica a sonidos o inscripciones que no hayan sido usadas por un solo emisor humano con intenciones lingüísticas[5], y

(*b*) una oración-caso tiene el valor de verdad que le corresponde en el contexto, en el lenguaje y con el uso que propuso el emisor. Si el emisor no lo tiene claro, tendrá el valor de una disyunción de los significados entre los que no decidió.

[5] Aunque una computadora pudiera darnos oraciones "nuevas", en el supuesto de que fueran significativas, parece que no tendría ningún sentido preguntarse si son verdaderas o falsas, en este enfoque.

Estas convenciones aseguran que las oraciones-caso cumplen la condición de no variar su valor de verdad, pero para que cumplan también la segunda condición (que todos los portadores tengan un valor de verdad), Orayen establece una convención más:

(*c*) Llamamos enunciado a toda oración-caso que tenga un valor de verdad.

Cada una de las oraciones-caso que son verdaderas o falsas es, *por definición*, un enunciado. Los enunciados (entidades lingüísticas) son los portadores de verdad, lo son por definición, pero esto no es trivial, pues no es fácil decidir cuándo una oración-caso pertenece al subconjunto de las oraciones-caso que hemos decidido llamar "enunciados". Pero ¿sabemos cómo identificar un contexto de emisión? Orayen nos dice: "Supondremos que el contexto es una zona del espacio-tiempo α, con un centro definido, α_c. Por tener un centro, α debe poseer una forma espacial esférica; por ser una zona del espacio-tiempo, debe tener extensión temporal. α puede visualizarse, entonces, como una zona esférica del espacio durante un cierto lapso de tiempo definido. α_c debe concebirse como un punto instante ubicado en el centro geométrico de α y exactamente en el punto medio del lapso temporal que α abarca"[6]. Dada una oración-tipo (entidad abstracta) *p* y un contexto α, para cada oración-caso habrá un par y sólo uno <*p*, α> oración-tipo *en ese* contexto asociado, puesto que en cada contexto concreto, α_c es único.

Vistas las cosas así ¿podemos efectivamente llegar a evaluar alguna oración-caso como verdadera?, ¿podemos identificar un espacio esférico en un lapso de tiempo?, ¿podemos determinar su centro, que la emisión se produjo exactamente en la mitad de ese tiempo, que el emisor quiso usar la oración con un significado determinado, etc.? ¿Cómo podríamos leer un libro, si para adscribir valores de verdad tuviéramos que conocer todos esos detalles? ¿No podemos evaluar como falsa una oración cualquiera cuya forma lógica es $p \wedge \neg p$ sin necesidad de conocer al emisor, ni sus intenciones, ni el tiempo o el lugar donde la emitió?

El propio Orayen anticipa la crítica del defensor de las proposiciones como portadores de verdad: se quiere evitar la noción de proposición para no postular entidades extrañas, pero para determinar el valor de verdad de los enunciados acudimos al significado. La respuesta de Orayen es que hacer uso del término "significado" no conlleva postular los significados como entidades. Pero hay algunas críticas más que se le pueden plantear:

---

[6] ORAYEN, R. (1989): 46.

1. Distintos enunciados con estructuras gramaticales diferentes pueden expresar la misma proposición y compartir *por eso* la misma forma lógica. La lógica trata de representar la estructura de una proposición o, si se prefiere, la estructura profunda de un enunciado.

2. Es por tener tal o cual significado una oración emitida en un contexto, por lo que decimos que la oración es verdadera o falsa o que *no tiene valor de verdad*. Por mucho que fijemos la expresión lingüística y determinemos todo el contexto de uso efectivo (cosa que es dudoso que podamos hacer), no podemos asociarle un valor de verdad sino derivadamente, es decir, por tener un valor de verdad su significado.

3. Cuando la lógica se aplica al lenguaje ordinario, no se interesa por el valor de verdad de las oraciones-caso, se ocupa únicamente de reconocer estructuras, se ocupa de las relaciones posibles entre los valores de verdad no efectivos, sino también posibles, de las proposiciones expresadas en los enunciados. En primer lugar identifica los enunciados; en segundo lugar fija una estructura lógica presente en él, pero, como veremos más adelante, la forma lógica de un pensamiento no coincide con generalidad con la forma gramatical del enunciado que lo expresa.

La lógica parte del presupuesto de que las oraciones declarativas (enunciados) expresan un pensamiento que es verdadero o falso, pero no es la lógica la que ha de investigar el valor de verdad de un enunciado atómico. Hemos de distinguir la verdad empírica (cuya determinación puede corresponder a las distintas ciencias o al sentido común) de la verdad debida a la estructura lógica de los enunciados y las dependencias de verdad entre distintas formas de enunciar algo. A la lógica le interesa el valor resultante de componer distintos valores de ciertas maneras, signifique lo que signifique cada elemento atómico y calculando todas sus posibilidades de verdad, se emita la composición de enunciados correspondiente cuando sea, por quien sea y en el lenguaje natural que sea.

Lo que nos conviene es elegir el enfoque más simple en su formulación y con menos postulados. La verdad que interesa a la lógica clásica no puede depender de contextos de uso ni del lenguaje particular en el que se dice algo, ya sea un lenguaje natural o uno formal. Por ejemplo, *todos* los enunciados que tengan como mínimo la forma $p \rightarrow p$ son verdaderos: “Si $2 + 2 = 4$, entonces $2 + 2 = 4$”, “Wenn es regnet, dann regnet es”, “Si dios no existe, entonces dios no existe”, etc.

1.3. Afirmaciones

La lógica clásica no admite ni que una proposición carezca de valor de verdad ni que cambie su valor, y asigna valores de verdad a componentes de oraciones que no son afirmados separadamente. Al afirmar "Madrid no es una ciudad" no estamos afirmando también que Madrid es una ciudad, en lenguaje semi-formal: al afirmar "$\neg p$" no afirmamos también "p", al afirmar "$p \to q$" no afirmamos ni "p" ni "q", etc. Sin embargo "Madrid no es una ciudad" tiene un valor de verdad sólo si "Madrid es una ciudad" lo tiene. Esto no lo podríamos decir si el portador de verdad no fuera la proposición y derivadamente el enunciado que la expresa, sino la afirmación. Si el portador fuera la afirmación, la lógica sería incapaz de justificar por qué el valor de verdad de "Madrid no es una ciudad" es el opuesto del de "Madrid es una ciudad" y cómo puede ser que una parte de aquella afirmación carezca de valor de verdad.

Al afirmar un enunciado cualquiera E, lo que hacemos es ponerlo *como verdadero* y esta afirmación puede reconstruirse en forma de un nuevo enunciado afirmable: "Es verdad que E". Es importante darse cuenta de esta distinción porque, si ponemos como verdadero un pensamiento incompleto, uno que predica algo de nada, uno que no tiene valor de verdad, todavía podemos discutir si esa afirmación es verdadera o falsa o carece también de valor de verdad. Si decimos que el enunciado "El actual rey de Francia es calvo" no es ni verdadero ni falso, todavía podemos preguntar si el enunciado "Es verdad que el actual rey de Francia es calvo" es verdadero o falso. No es, pues, lo mismo la verdad de un pensamiento (contenido afirmable) que la verdad de una afirmación (contenido afirmado *como verdadero*). A veces "p es verdadero" no tiene el mismo valor de verdad que "p". Lo tiene sólo cuando nos hemos asegurado de que "p" representa una oración declarativa que no contiene términos no referenciales ni deícticos ni conceptos vagos.

1.4. Proposiciones

Una vez reducida la clase de los enunciados a aquellos que expresan proposiciones, es decir, significados evaluables como verdaderos o falsos, en la lógica clásica es indiferente si hablamos de enunciados o de proposiciones, siempre, claro está, que sepamos que uno es el significante y el otro el significado. Al decir que $p \to p$ es un esquema válido, estamos diciendo que, pongamos la proposición que pongamos en el lugar de "p", obtendremos una proposición (compleja) verdadera. Decir "una proposición" o "un enunciado" no son sino modos abreviados de decir "un

enunciado que expresa una proposición", pues en el cálculo lógico ya sólo nos interesan los valores de verdad y sus posibles composiciones. Cuando decimos que $\alpha \to \alpha$ es un esquema o una forma válida, estamos diciendo que si sustituimos α por cualquier fórmula, obtenemos un esquema válido proposicional, apto para sustituir sus letras proposicionales o enunciativas por enunciados concretos y obtener un enunciado tautológico. Ejemplos de instancias de $\alpha \to \alpha$ son: $p \to p$, $\neg p \to \neg p$, $(p \wedge \neg r) \to (p \wedge \neg r)$. Ejemplos de instancias de $p \to p$ son: "Si Madrid es una ciudad, entonces Madrid es una ciudad", "Si dos y dos son tres, entonces dos y dos son tres". Ahora bien, ¿qué es una proposición?, ¿no será una mera manera de hablar de enunciados verdaderos o falsos o es algún tipo de entidad no lingüística?, si es así ¿es independiente de todo lenguaje?, ¿qué se quiere decir cuando se afirma que es el contenido expresado en un enunciado?

Se han señalado tres usos de esta noción:

1) Uso semántico: una proposición es lo que captamos como verdadero o falso, el sentido expresado en un *enunciado* y portador de un (único) valor de verdad.
2) Uso pragmático: Una proposición es el contenido de una aserción o una orden, lo que se dice al *emitir* un enunciado. El contexto puede ser importante para determinar la proposición expresada en la emisión. Así, podemos tener dos proposiciones diferentes en dos emisiones distintas del mismo enunciado.
3) Uso psicológico: Una proposición es el contenido de una creencia o un deseo.

La pregunta ontológica, ¿qué tipo de entidad es una proposición?, ha recibido principalmente tres respuestas:

a) Una proposición es un estado de cosas en el mundo, una colección de objetos o propiedades existentes en el mundo.
b) Una proposición es una entidad lingüística, más o menos similar a los enunciados: una sucesión de signos con cierta estructura.
c) Una proposición es una entidad intensional, es decir, una entidad abstracta no reducible ni a una colección de objetos ni a una colección de signos.

El defensor de las proposiciones como estados de cosas no puede dar cuenta del uso psicológico: ¿cómo puede ser algo meramente desea-

do, es decir, el deseo de que sea el caso algo que no es el caso? El defensor de las entidades lingüísticas puede explicar los usos primero y tercero diciendo, por ejemplo, que existe también una especie de signos lingüísticos mentales, pero tiene dificultades para explicar el uso pragmático. El defensor de las entidades abstractas puede explicar los tres usos señalados.

Poco a poco se han ido afianzando dos usos principales del término "proposición":

1) como contenido de un enunciado en el sentido de lo que puede ser verdadero o falso en el mundo, y
2) como contenido afirmado en una emisión particular de un enunciado: lo que puede ser objeto de creencia o deseo.

Hay un acuerdo general a la hora de reconocer las dos condiciones de los portadores de verdad: 1) todos los miembros del tipo relevante son verdaderos o son falsos, y 2) ningún miembro puede cambiar de valor de verdad. Así, por ejemplo, "El actual rey de Francia es calvo" no es un buen candidato, pues puede ser verdadero en un tiempo, falso en otro y sin valor de verdad en otro tiempo. Debemos hacer en las oraciones las transformaciones necesarias para que cumplan 1) y 2) hasta donde sea posible: incluir los elementos del contexto que son relevantes para la verdad, asegurarnos de que todos los términos utilizados tienen una denotación y sólo una y de que todos los predicados delimitan claramente los elementos de su extensión.

Esas condiciones parece que comprometen con una teoría de la verdad bivalente y eterna, pero dejaremos la discusión de esta cuestión para el siguiente capítulo y los dedicados a lógicas no clásicas.

Resumiendo, las dos posiciones ontológicas principales entienden por "proposición" el significado de un enunciado, unos identifican estos significados con estados de cosas o hechos en el mundo y los otros defienden que se trata de entidades abstractas.

Consideremos el enunciado

(1) Pilar es honesta

Según los defensores de los significados como estados de cosas en el mundo, la proposición expresada en (1) es el hecho <Pilar, ser honesto>, donde "Pilar" y "ser honesto" no son nombres, sino un determinado individuo y una determinada propiedad, respectivamente. Si ese hecho existe en el mundo, el enunciado (1) es verdadero.

Ahora bien, si hacemos esa identificación entre proposiciones y hechos, tropezamos con algunas dificultades importantes. Un enunciado como

(2) María es honesta

designa el mismo hecho que (1) en el caso de que sea verdadero que Pilar es María. ¿Dónde queda, entonces, el valor cognitivo de una identidad no trivial?:

(3) Pilar es María.

¿Cuál es el hecho expresado en (3)? Aplicando la sustitución de los idénticos podemos transformar enunciados verdaderos en enunciados verdaderos. Por ejemplo, contando con la identidad

(4) Pilar es la madre de Carlos

podemos obtener

(5) La madre de Carlos es honesta.

¿Tienen (1) y (5) el mismo significado?, ¿describen el mismo hecho?, ¿describen todos los enunciados verdaderos un único Gran Hecho: el mundo real?

Además ¿qué hecho podría hacer falso un enunciado?, ¿existen hechos negativos?, ¿qué pasa con la cuantificación?, ¿qué pasa con la negación de un existencial?, ¿qué hecho hace verdadera una cuantificación universal?, etc.

Frege distinguió el sentido y la referencia como los dos componentes principales del significado de toda expresión. En general, la sustitución de una expresión por otra con la misma referencia no puede hacer cambiar la referencia de la expresión compleja, aunque muy probablemente se producirá un cambio en el sentido. Una misma referencia se puede determinar mediante distintos sentidos, pero un sentido no puede determinar distintas referencias. Trasladando esto a las proposiciones y los valores de verdad, podríamos decir que un valor de verdad puede alcanzarse mediante distintas proposiciones, pero cada proposición es verdadera o falsa y ninguna puede cambiar su valor de verdad. No debemos confundir la entidad lingüística (enunciado), con el pensamiento (sentido), ni con el valor de verdad (referencia).

Predicamos la verdad de un pensamiento y derivadamente del enunciado que lo expresa. También derivadamente podemos decir que las afirmaciones son verdaderas o falsas, pero hemos de distinguir un enunciado de los usos de un enunciado. Con una expresión enunciativa pode-

mos hacer distintas cosas, por ejemplo: creer su contenido, afirmarlo como verdadero o preguntar por su valor de verdad. Lo que distingue la afirmación "⊦ la nieve es blanca" de la pregunta "¿Es blanca la nieve?" no es el pensamiento, sino que la primera tiene fuerza asertiva y la segunda fuerza interrogativa. Si respondemos "sí" a la pregunta, estamos dando el valor de verdad del pensamiento por el que se pregunta, transformando la pregunta en una afirmación.

Cuando se identifica una proposición con el significado de un enunciado, la estamos identificando únicamente con una parte de ese significado: el sentido. Cuando se usa un enunciado para hacer una afirmación, se está diciendo que un cierto pensamiento es verdadero. Ese pensamiento puede ser expresado utilizando deícticos cuya referencia conocen quienes están presentes en el momento de la emisión del enunciado. De modo que es una imprecisión decir que a un enunciado determinado cualquiera corresponde un sentido determinado de una vez y para siempre y, con él, un valor de verdad. Es el sujeto el que expresa un pensamiento mediante un uso de un enunciado en una ocasión determinada. Ahora bien, Frege está interesado en diseñar un lenguaje formal que sirva para el cálculo de consecuencias y los enunciados adecuados para ese fin serán aquellos en los que se haya fijado su sentido incorporando todos los elementos contextuales que contribuyen a la expresión del pensamiento. Una expresión como "Yo estoy escribiendo ahora" no debería considerarse un enunciado, sino más bien una expresión funcional del tipo "*a* está escribiendo *algo* en *t*". Así es como la propuesta fregeana puede dar cuenta de los usos 1, 2 y 3 señalados; del primer uso porque declara los pensamientos como los portadores de valores de verdad; del segundo porque, reconstruyendo el enunciado cuando sea preciso, se establece una aplicación entre el conjunto de enunciados afirmados (efectivos) y el conjunto de las proposiciones, de modo que cada enunciado "porta" el valor de verdad del pensamiento que expresa. El enunciado es una entidad física y distintos enunciados pueden expresar la misma proposición, pero cada uno de ellos tiene determinado el valor de verdad de la proposición que expresa. Por otra parte, esos enunciados no están sometidos ya a ninguna condición de uso.

¿Nos sirven también los "pensamientos" fregeanos como proposiciones en el tercer uso que hemos señalado? Sí, siempre y cuando no identifiquemos un deseo o una creencia con alguna imagen mental individual. Por ejemplo, "Juan cree que París está en España" es un enunciado que puede ser verdadero y la creencia de Juan es algo cuyo valor de verdad tiene sentido investigar. Lo que Juan cree es que el pensamiento expresado en "París está en España" es verdadero. Habría que matizar: una creencia se

parece más a una afirmación, no se limita a expresar una proposición o pensamiento que puede ser verdadero o falso, sino que contiene ya una evaluación semántica.

Las creencias sirven como criterio para distinguir proposiciones: se dice que si un hablante competente puede creer que un enunciado *X* (expresa un pensamiento que) es verdadero y que otro enunciado Y es falso, sin caer en contradicción, la proposición expresada en *X* es distinta de la proposición expresada en *Y*.

Una manera de entender el análisis del significado en términos de sentido y referencia es la que se ha desarrollado a partir de las nociones modales y la semántica de los mundos posibles. El sentido de una expresión cualquiera se puede ver como la regla que utilizamos para seleccionar, construir, señalar (según el caso) una referencia. Aplicada esta idea a las proposiciones, se dice que una proposición (sentido de un enunciado, intensión) es una función de mundos posibles a valores de verdad (referencia del enunciado, extensión); aplicada a las expresiones que componen un enunciado simple, el sentido de un nombre propio es una función de mundos posibles a individuos, el de un predicado monádico es una función de mundos posibles a colecciones de individuos y, en general, el de un predicado n-ádico es una función de mundos posibles a colecciones de n-tuplas de individuos. La intensión de una expresión es una regla que determina su extensión.

Se ha propuesto pensar una proposición extensionalmente como la colección de argumentos (mundos posibles) que hacen la función proposicional verdadera. La gran dificultad de esta reducción es que dos pensamientos que consideramos distintos serían, después de todo, el mismo: si dos enunciados son verdaderos exactamente en los mismos mundos posibles y una proposición no es nada más que esa colección de mundos posibles que hacen verdadero el enunciado, tendremos que decir que los dos enunciados expresan la misma proposición, aún cuando un hablante competente y veraz sostenga que puede creer en la verdad de uno y en la falsedad del otro sin caer en contradicción. Si identificamos una función con la colección de los argumentos para los cuales la función alcanza el valor de lo verdadero, hemos prescindido del valor cognitivo de la función como regla y cae la distinción entre equivalencia e identidad. Sin embargo, aunque dos reglas distintas pueden correlacionar exactamente la misma colección de argumentos con un valor de verdad determinado (como dos sentidos distintos pueden, en el caso de dos nombres propios, determinar la misma referencia), equivalencia extensional no significa sin más sinonimia, dos reglas distintas pueden determinar el mismo objeto o

la misma colección de objetos o de n-tuplas de objetos sin que debamos confundir, por ello, la regla con el objeto:

> no es más correcto ni más erróneo definir una cónica como la línea de intersección de un plano con la superficie de un cono circular, que definirla como una curva plana con una ecuación de segundo grado en coordenadas paralelas (...) aunque las expresiones no tienen el mismo sentido ni evocan las mismas representaciones. No quiero decir con esto que un concepto y su extensión son la misma cosa; pero la coincidencia en extensión es un criterio necesario y suficiente para la ocurrencia entre conceptos de la relación correspondiente a la identidad entre objetos (...) pues la identidad en el sentido propio de la palabra no tiene lugar entre conceptos[7].

Si leemos "concepto" como "regla", este texto de Frege está muy cerca de lo que aquí sostenemos: entre conceptos se puede establecer equivalencia, no identidad, si bien la equivalencia es similar a la identidad y se establece cuando los conceptos coinciden extensionalmente. Entendido el concepto como una regla, podemos pensarlo como una instrucción para lograr encontrar o construir (según el caso) una colección de objetos. Es importante subrayar la palabra "colección" sobre la de "objeto", pues la colección también puede ser vacía, la regla nos da la colección, nos dice qué objetos, si alguno, pertenecen a ella. Por ejemplo, la regla (función) aritmética $(x + y)^2$ es extensionalmente equivalente a la regla: $(x^2 + y^2 + 2xy)$, pero las operaciones que se nos indican para alcanzar un número como valor de cada función para cada par de argumentos permanecen como distintas.

Resumiendo, tratar de evitar la noción de significado identificando las proposiciones con oraciones-caso no nos lleva demasiado lejos: no podemos determinar de qué oración-tipo es una oración-caso dada, a menos que acudamos a la noción de significado.

Puesto que los enunciados sirven para hacer afirmaciones verdaderas o falsas, se ha defendido también que los portadores de la verdad son las afirmaciones. Pero es importante distinguir el contenido proposicional de su afirmación como verdadero, si estamos interesados en las relaciones de consecuencia. Cuando afirmamos un condicional no estamos afirmando ni el antecedente ni el consecuente, sino únicamente una relación entre ambos (lo veremos más detenidamente al examinar los significados de los operadores lógicos y de los operadores lingüísticos).

El no poder dar criterios de identidad para significados o pensamientos como entidades, no hace que se conviertan en nociones prescindibles.

---

7 FREGE, G.: "Dr. E.G. Husserl: Philosophie der Arithmetik, Psychologische und logische Untersuchung", en *Kleine Schriften*, Zürich, Georg Olms, 1990: 183-4.

Podríamos decir con Quine que la lógica clásica opera con valores de verdad y considera todos los casos posibles. Pero hay un momento en el quehacer del lógico, previo al cálculo, que es el de la formalización. ¿Cómo podríamos llevar a cabo la formalización, si no nos pusiéramos de acuerdo acerca de lo que queremos decir con un enunciado dado y acerca de cuáles serían sus *traducciones* apropiadas dentro del mismo lenguaje natural que queremos formalizar?

2. TEORÍAS DE LA VERDAD

2.1. Verdad y validez

En nuestros usos ordinarios aplicamos la palabra "verdad" cuando afirmamos algo, ya sea mediante un enunciado o un conjunto de enunciados, como cuando tratamos de relatar hechos complejos. Cuando decimos que queremos saber *toda la verdad* antes de tomar alguna decisión, estamos pidiendo información relevante y veraz sobre algún asunto. Utilizamos la palabra "verdadero" como opuesta a lo falso, incluyendo lo aparentemente verdadero pero falso. ¿Qué relación tiene ese uso del predicado "verdad" con el uso que de esta expresión hacemos en lógica? La lógica no sólo no puede prescindir de la noción de verdad, sino que explica la relación de consecuencia lógica en términos de relación lógica *necesaria* y esa necesidad está estrechamente relacionada con las nociones de *verdad* y *validez*.

Disponemos de dos explicaciones, una semántica y otra sintáctica, de la relación de consecuencia lógica. La primera gira en torno a la noción de verdad, la segunda en torno a la noción de derivabilidad. ¿Son las nociones de verdad y de derivabilidad independientes entre sí o podemos definir una de ellas en función de la otra?, ¿podemos reducir ambas nociones a nociones más básicas?

La definición semántica dice que existe una relación de consecuencia, en un sistema *S*, entre las premisas (Γ) y la conclusión (α), cuando bajo ninguna interpretación pueden resultar verdaderas las premisas y falsa la conclusión. La inferencia desde el conjunto de afirmaciones Γ a la afirmación α es una inferencia *semánticamente válida*:

$$\Gamma \underset{S}{\vDash} \alpha$$

Decimos que una inferencia deductiva es *sintácticamente válida*, que existe relación de consecuencia sintáctica entre las premisas (Γ) y la con-

clusión (α), en un sistema *S*, cuando podemos obtener o construir α a partir de Γ y los axiomas y reglas de S:

$$\Gamma \underset{S}{\vdash} \alpha$$

Podemos concebir la verdad lógica como un caso especial de esta validez definida para argumentos: el caso en el que el conjunto de las premisas es vacío.

α es una *verdad lógica* en *S* (una fórmula válida-en-*S*) si es verdadera bajo toda interpretación en *S*:

$$\underset{S}{\vDash} \alpha$$

α es una *verdad lógica* en *S* (una fórmula válida-en-*S*) si puede ser obtenida o construida sin premisas, utilizando sólo los axiomas y las reglas de *S*:

$$\underset{S}{\vdash} \alpha$$

Queremos saber qué hay en estas nociones lógicas del significado con el que usamos la expresión “es verdadero” en el lenguaje natural. Las distintas teorías que se han dado de la verdad, excepto la teoría de la redundancia, parten de dos intuiciones básicas comunes:

1) Un conjunto de verdades ha de ser consistente.

2) La verdad ha de tener algo que ver con la realidad.

2.2. Teoría de la redundancia

La teoría de la redundancia no es una teoría acerca de *qué es* la verdad, sino una teoría acerca de *qué hacemos* al adscribir verdad, es una teoría pragmática deflacionaria. Lo que se niega con generalidad es que estemos predicando una propiedad de un enunciado, proposición o creencia; al afirmar que *p* es verdadero no hacemos nada más que afirmar que *p*. Se pueden eliminar la expresiones “es verdadero” y “es falso”, sin pérdida semántica: “Es verdadero que *p*” significa lo mismo que “*p*”; “Es falso que *p*” significa lo mismo que “$\neg p$”.

Los defensores de esta teoría creen poder prescindir de los portadores de verdad, pues, al no ser la verdad un predicado genuino, no necesitamos ningún sujeto para ella. Sin embargo, no está nada claro ni que

podamos prescindir de las proposiciones ni que podamos eliminar el "es verdadero" en todo contexto.

Se han planteado dos objeciones importantes a la teoría de la redundancia:

1) La expresión "es verdadero" no siempre es redundante, no siempre la podemos eliminar. Es el caso de los enunciados del tipo "Todo lo que dice *a* es verdadero". Ramsey propone interpretarlos como "Para todo *p*, si *a* afirma *p*, entonces *p*". Pero ese cuantificador universal no puede afectar de igual manera a las dos ocurrencias de "*p*". Si aplicamos un cuantificador universal sobre "*p*", "*p*" debe ocupar un lugar de argumento en todas sus ocurrencias dentro del alcance del cuantificador, y efectivamente su primera ocurrencia señala el lugar de un argumento para el predicado "*a* afirma ...", sin embargo la segunda ocurrencia de "*p*", que no va precedida ni seguida de un predicado, hace que la expresión completa no esté bien construida. Su incorrecta forma lógica sería:

   $$\forall p\ (Ap \rightarrow ...p)$$

   Siendo A: ser afirmado por *a*

   Lo que se quiere decir con el enunciado es: "Para todo *p*, si *a* afirma *p*, entonces *p* es verdadero". En este caso no podemos prescindir del predicado "es verdadero". Su forma lógica es, entonces:

   $$\forall p\ (Ap \rightarrow Bp)$$

   Siendo *A*: ser afirmado por *a*, y siendo *B*: es verdadero

2) Distinguimos enunciados que tienen un valor de verdad y enunciados que no logran decir nada que podamos evaluar como verdadero o como falso, es el caso de los enunciados que contienen nombres propios o descripciones definidas, que parecen nombrar un objeto, pero no nombran nada. Supongamos que un enunciado *p* no tiene valor de verdad. Entonces el enunciado "*p* es verdadero" es un enunciado falso y no es, por tanto, equivalente al enunciado "*p*". Es decir, en estos casos tampoco la expresión "es verdadero" es eliminable, ni "*p* es verdadero" equivale a "*p*", ni "*p* es falso" equivale a "no *p*".

2.3. Teorías pragmáticas

Las teorías pragmáticas de la verdad tratan de sustituir la noción de verdad por las de utilidad y verificabilidad, tarea condenada al fracaso de antemano, pues "ser verdadero" es un predicado monádico: (algo) es verdadero, mientras que "ser útil" y "ser verificable" son predicados diádicos: (algo) es útil para (algo o alguien), (algo) es verificado o verificable (por alguien).

El pragmatista quiere conjugar la correspondencia y la coherencia: la verdad se deriva de la correspondencia entre las creencias y el mundo, pero se mantiene por la coherencia con otras creencias. Los significados de los términos en general vienen dados por sus consecuencias prácticas, nuestras ideas deben conformarse con la realidad, sea ésta lo que sea, en caso contrario enseguida caeríamos en contradicciones. Es decir, al igual que en las teorías de la correspondencia, se sostiene que existen ideas abstractas y hechos concretos y una relación entre ambos, pero no aceptan que esa relación sea de adecuación.

Hay una realidad que es independiente de las opiniones y es lo que mide su estabilidad, pero el conjunto de lo que creemos verdadero viene regulado por la propiedad de la coherencia, pues la adquisición de una nueva creencia exige maximizar el viejo conjunto de creencias y restaurar, en su caso, la consistencia. Peirce define la verdad como la opinión estable que dispone a la acción. Cuando la experiencia se resiste, aparece la duda, se produce una situación inestable que estimula la investigación, pero al final de una investigación científica completa alcanzaremos la verdad, el acuerdo en una opinión estable. En relación con esa situación final ideal, nos dice James:

> Lo absolutamente verdadero, es decir, lo que ninguna experiencia ulterior alterará nunca, es ese punto ideal hacia el que nos imaginamos que convergerán algún día todas nuestras verdades temporales. Equivale al hombre perfectamente sabio y a la experiencia absolutamente completa; y si estos ideales se realizan algún día, se realizarán conjuntamente. Entre tanto, tendremos que vivir hoy con arreglo a la verdad que podamos obtener hoy y estar dispuestos a llamarla falsedad mañana[8].

Los hechos no son ni verdaderos ni falsos, simplemente son y determinan creencias provisionales que nos mueven a actuar. Con esta acción generamos o descubrimos otros hechos que dan lugar a otras creencias.

---

[8] James, W.: "Concepción pragmatista de la verdad", en Nicolás y Frápoli (eds.) (1997): 37ss.

Se va constituyendo un sistema de creencias regido por la coherencia. La verdad se puede ver entonces como una función de creencia que empieza y termina en los hechos.

Una proposición es (provisionalmente) verdadera si pertenece a un conjunto coherente de proposiciones. No se identifican las nociones de verdad y coherencia: el conjunto de las proposiciones no es verdadero ni falso, sino coherente o consistente; son sus elementos los que son provisionalmente verdaderos o falsos.

La coherencia mínima es la no contradicción: dos proposiciones tales que una es la negación de la otra no pueden pertenecer ambas al mismo conjunto de verdades, no están mutuamente en la relación de coherencia.

En principio, cuando se habla de verdad en términos de conjunto de creencias consistentes, no se está diciendo que la verdad se reduce a lo que es creído así por *alguien*. La teoría del consenso afirma que lo verdadero es aquello que *todos* coinciden en considerar así, la verdad de una afirmación consiste en su adecuación con un conjunto de afirmaciones que son las que constituyen el sistema de creencias vigente en un momento dado. El control de las proposiciones que se seleccionan como verdaderas (mutuamente coherentes) lo ejerce la ciencia.

En una teoría coherentista radicalizada, en la que se defienda la idea de que la noción de verdad se puede reducir a la de coherencia, se duda de que los enunciados básicos se puedan verificar en confrontación directa con los hechos y se sostiene que el único criterio de verdad es la coherencia *dentro* del conjunto de las creencias. Rescher propone como requisito de un sistema coherente la *consistencia* y la *exhaustividad*. El problema general es seleccionar, dentro del conjunto inconsistente inicial de "datos" *S*, un subconjunto consistente máximo *S'*: *S'* es un subconjunto consistente máximo de *S*, si *S'* es no-vacío y no puede añadírsele ningún elemento de *S*, que *S'* no tenga, sin que se haga inconsistente. Con esta definición podemos encontrar distintos subconjuntos consistentes máximos dentro de un mismo conjunto inconsistente de creencias. Por eso Rescher[9] propone introducir un criterio de *plausibilidad* para la selección de los subconjuntos y aplicar la verdad no a los elementos de cada uno de los subconjuntos seleccionados, sino a la disyunción.

Sin embargo, la coherencia sola no basta para justificar el sistema de creencias elegido; por eso, la mayor parte de los pragmatistas sostienen

[9] RESCHER, N.: "Verdad como coherencia ideal", en Nicolás y Frápoli (eds.) (1997): 495-508.

que la verdad se reduce a coherencia *y verificabilidad*. Como dice Quine, las condiciones de verdad son condiciones de constatación, el significado de un enunciado viene dado por las condiciones empíricas posibles que justificarían la creencia en su verdad, la diferencia que su verdad produciría en nuestra experiencia sensible.

Wittgenstein desarrolla la teoría de que el significado de una palabra es una regla para su uso, pero identificar significado y uso no es afirmar que todo modo de usar una expresión contribuye a su significado. La objetividad del significado y las afirmaciones dependen de que podamos distinguir aplicaciones correctas de aplicaciones incorrectas, un hablante competente es alguien que sabe qué cuenta como aplicación correcta y qué no. Las reglas no son simplemente descripciones de usos, sino que son *indicaciones* de usos *correctos*. Hay un componente normativo en el significado y hay que poder dar cuenta de él. Sin una distinción entre lo que a uno le *parece* un uso correcto y lo que *es* un uso correcto del lenguaje perderíamos la objetividad del significado. Esto es lo que Kripke llama la paradoja del escéptico: alguien ha estado usando el signo "+" satisfactoriamente aplicándolo a números menores que 57; entonces se le pregunta por "57 + 68"; debería responder 125, pero ¿cuál es el hecho que hace que esa sea la respuesta correcta?, ¿cómo reconocemos cuál es la regla seguida hasta el 57?, ¿cómo y por qué proyectamos una operación en particular hacia casos nuevos?, ¿necesitamos una regla para interpretar una regla? La primera respuesta es que no hay hechos que constituyan el significado de una expresión. En segundo lugar hay que concluir que no se puede dar una justificación última. Para resolver este problema basta tener en cuenta que el lenguaje es público, una regla es una práctica social: seguir una regla es participar en una práctica lingüística comunitaria. Se aplica correctamente una expresión, si su uso coincide con el uso mayoritario en la comunidad lingüística a la que se pertenece. La corrección, entonces, no es relativa a una regla seguida por algún usuario individual, sino que es el uso comunitario lo que cuenta como modelo de uso, el uso individual cuenta como aplicación correcta o incorrecta, según se adecúe o no al modelo. La aplicación individual es correcta o incorrecta, pero el uso comunitario no es correcto ni incorrecto, ni determina lo que se exigirá de los usuarios en el futuro para coincidir con el uso mayoritario. Este contraste entre el uso individual y el mayoritario es suficiente para dotar al significado de objetividad.

Kripke defiende que no hay una respuesta totalmente satisfactoria a la paradoja escéptica, pero que podemos vivir con las consecuencias. El significado carece de condiciones de verdad, pero tiene condiciones de afirmación.

Quine explica la noción de verificación de dos modos diferentes: 1) las expresiones que tienden a confirmar un enunciado son aquellas que provocan en la gente, como hecho conductual, el asentimiento; 2) el significado de un enunciado no-observacional es el conjunto de sus implicaciones lógicas (derivabilidad); pero los enunciados individuales raramente tienen su base en experiencias confirmadoras, porque la confirmación es holista, no se puede establecer una correlación uno-uno entre los enunciados y las experiencias que causan su afirmación, sino que es la totalidad del saber en un momento dado lo que la experiencia puede poner a prueba (holismo epistémico).

Algunas objeciones que se han planteado a las teorías pragmáticas de la verdad son las siguientes:

1) El acuerdo general puede ser una consecuencia de la verdad, pero no a la inversa. Si el consenso fuera el criterio de verdad, sería imposible que todos se equivocaran alguna vez. El consenso puede ser un factor relevante para asumir algo como verdadero, pero con todo ha de permanecer la diferencia entre "tomar algo como verdadero" y "ser algo verdadero".

2) Russell ya denunció que en definitiva el criterio de la coherencia se reduce a la consistencia, pero un gran conjunto de falsedades puede ser consistente, como lo puede ser también un relato completo que se hace sin pretensión de verdad, como ocurre con los cuentos de hadas infantiles, o con pretensión de verdad, mezclando consistentemente verdades y falsedades, como ocurre con otros cuentos que se presentan como relatos de hechos reales.

> Los investigadores de pega y los que fingen no tienen como objetivo encontrar la verdad, sino argumentar a favor de alguna proposición identificada previamente a la investigación (...) El investigador genuino quiere llegar a la verdad de la cuestión que le concierne, tanto (...) si es probable que su reconocimiento de la verdad lo lleve a obtener una plaza fija, o lo haga rico, famoso o popular, como si no (...) El razonamiento de pega en forma de «academicismo», mejor caracterizado como medio de auto-promoción, [es] demasiado frecuente"[10].

3) Estas teorías están viciadas por la circularidad: se define la verdad mediante la consistencia, pero la noción de consistencia depende de la noción de verdad.

[10] HAACK, S.: "El interés por la verdad: qué significa, por qué importa", en Nicolás y Frápoli (eds.) (1997): 56-61.

4) Son posibles distintos sistemas máximos coherentes mutuamente incompatibles. Pero no hay verdades incompatibles, lo que hay son declaraciones-de-verdad incompatibles.

5) Hay afirmaciones que pueden tener valor de verdad sin ser verificables, por ejemplo afirmaciones sobre el pasado o sobre el futuro, afirmaciones sobre dominios infinitos, contrafácticos, etc. Por ejemplo: "La especie humana se extinguirá sin que se extingan con ella todos los seres vivos existentes". Se podría responder que las afirmaciones sobre acontecimientos futuros no son ni verdaderas ni falsas, o bien, que esa afirmación es verdadera porque se deriva de otras afirmaciones que sí son verificables. Pero hay casos en los que claramente no se puede reducir la noción de verdad a la de verificación: imaginemos un crimen perfecto en el que un individuo *a* es condenado por un crimen que no cometió y nadie, ni siquiera él mismo, sabe que es inocente, la única persona que lo podría saber está muerta. Puede ser "útil" condenarle, pero todavía intuimos que hay una diferencia con la verdad de que él no cometió el crimen del que se le acusa. No hay contradicción en que sea verdadero algo que todos creen falso. Nuestros usos de "es verdadero" responden a una noción transcendente de verdad.

6) Se confunde la noción de provisionalidad y el tomar algo como verdadero con el ser algo verdadero, y la noción de revisabilidad de las creencias con "dejar algo de ser verdadero" o "comenzar algo a ser verdadero". Según James, la lógica de Aristóteles fue verdadera durante siglos, pero ahora consideramos que sólo es verdadera relativamente, absolutamente es falsa. Sin embargo la lógica de Aristóteles no es un conjunto de creencias ni un conjunto de afirmaciones, que la silogística tenga límites de aplicación indica que se trata de un método más que de un conjunto de afirmaciones, y a un método se le aplican propiedades como útil, correcto, fecundo, etc., pero no la verdad o la falsedad.

2.4. Teoría de la adecuación o de la correspondencia

Los defensores de la idea de correspondencia interpretan la definición de Tomás de Aquino[11] como adecuación del pensamiento objetivo con la cosa, correspondencia del contenido afirmado con alguna realidad. De aquí es fácil pasar a considerar la existencia de dos estados de cosas, uno

[11] "Veritas est adaequatio rei et intellectus" (De Veritate, 1/1).

afirmado y otro real, que hemos de comparar para poder establecer la adecuación, lo cual no deja de ser un problema: para poder decir con pretensión de verdad que dicha relación se da, hemos de presuponer dos nuevos estados de cosas, cuya correspondencia mutua hacen verdadero el nuevo enunciado sobre la primera adecuación, pero esto daría lugar a una nueva afirmación y dos nuevos estados de cosas en correspondencia.

Una posible solución para este problema consiste en eliminar ese supuesto de la existencia de dos estados de cosas, el pensado o afirmado y el real, y decir simplemente que un enunciado afirmado es verdadero si y sólo si el estado de cosas que afirma es real. Ante esta insistencia en la existencia de estados de cosas o hechos *reales*, Frege protesta: ¡Hechos!, ¡hechos!, ¡hechos!, pero ¿qué es un hecho?, un hecho es un pensamiento que es verdadero. Los objetos se experimentan, los hechos no, los hechos sólo se afirman. No podemos oler, ver, etc., un hecho, ni podemos afirmar un objeto, sólo podemos nombrar un objeto. Muchas veces tomamos como equivalentes "Es verdadero que *p*" y "Es un hecho que *p*". Cuando decimos, por ejemplo, que es verdad que en Madrid hay mucha contaminación queremos decir que es un hecho que en Madrid hay mucha contaminación. Ahora bien, ¿podemos tomar esto como una explicación del significado del predicado *es verdadero*? No. ¿Qué diríamos si lo afirmado fuera algo como "Es un hecho que uno sumado a dos no es cinco" o algo como "Es un hecho que actualmente no hay ningún rey de Francia"? Frege defendió una cierta idea de la redundancia, pero no defendió que podamos prescindir de la verdad, sino que la verdad es una noción primitiva, indefinible, pues todo *decir* viene *después de* la verdad, una noción que no se deja analizar en términos de otras nociones más básicas, e insistió en la importancia de la *fuerza asertiva*: un enunciado que carezca de fuerza asertiva, no la va a adquirir añadiéndole las palabras "es verdadero".

Los teóricos de la correspondencia, a quienes critica duramente, y el propio Frege comparten la intuición de que una buena explicación de la verdad ha de dar cuenta de la distinción entre "ser verdadero que *p*" y "creer que *p*".

Russell y Wittgenstein sostienen que la verdad es una correspondencia *estructural* entre el lenguaje y el mundo. Las proposiciones atómicas verdaderas reflejan la disposición de los átomos en el mundo. Russell identifica esos átomos con los datos sensibles (de los cuales tenemos conocimiento directo) y distingue la *creencia probable* del *conocimiento*. En cuanto a lo primero, admite que la coherencia es un buen criterio de evaluación y es el estatuto de la mayor parte de nuestras creencias, pero ata-

ca la teoría de la coherencia aplicada al conocimiento y señala que una correcta teoría de la verdad ha de cumplir tres condiciones: 1) debe admitir un contrario de la verdad: la falsedad, 2) debe dar cuenta de que la verdad es una propiedad de las creencias y de las afirmaciones, y 3) esa propiedad depende de la relación entre las creencias y las cosas exteriores a ellas. Esta última condición significa que la verdad no depende del sujeto que juzga, sino de cómo son los hechos.

Carnap asume la teoría de la correspondencia de Russell y sostiene que los enunciados que se refieren a la experiencia inmediata (perceptual) son verificados directamente, mientras que la verdad del resto de los enunciados (siguiendo a Wittgenstein) depende de sus interrelaciones lógicas, los enunciados compuestos tienen un valor de verdad que resulta de aplicar alguna función sobre los valores de verdad de los enunciados componentes, es decir, los operadores lógicos proposicionales son funciones de verdad.

En cualquier caso, ese isomorfismo estructural que se postula tropieza con serias dificultades incluso en los casos más simples. Aún siendo benevolentes y concediendo que podemos comparar una estructura lingüística con una no lingüística, sin tener que afrontar el nuevo problema de justificar la verdad del enunciado en el que se establece la correspondencia (el cual debería estar en correspondencia con un nuevo hecho, en una regresión al infinito), se plantean objeciones que giran en torno a la negación de alguno de los términos: no hay portador de verdad, o bien no hay hechos con los que se correlacione el portador de verdad, o bien se niega la relación misma de correspondencia. Una de las principales críticas es que esta teoría no proporciona los criterios de identidad para poder decidir cuándo estamos ante un hecho, ¿cómo reconocemos los hechos?, ¿en qué consiste ese supuesto isomorfismo entre proposiciones y hechos?, ¿hay hechos negativos que se corresponden con proposiciones negativas?

Si para salir de estas dificultades decimos que sólo las proposiciones verdaderas se corresponden con hechos, no podremos explicar la noción de verdad mediante la noción de hecho, pues no podríamos distinguir los hechos con independencia de la noción de proposición verdadera.

Ante la objeción de que una explicación aceptable del significado de "verdadero" debe mostrar los criterios para determinar si una afirmación es verdadera, los teóricos de la propuesta responden que no se ha de confundir la verdad con la verificación, un pensamiento puede ser verdadero aún cuando no haya sido verificado por nadie. Pero podemos insistir en que entender un predicado es, en general, disponer de criterios para su aplicación.

2.5. Teoría semántica de Tarski

Tarski toma como punto de partida la definición aristotélica de verdad: “Decir de lo que es que no es o de lo que no es que es, es falso, y decir de lo que es que es y de lo que no es que no es, es verdadero”, y la reformula en términos modernos: la verdad de una oración consiste en su acuerdo con la realidad. Tarski recoge tanto la idea de que la verdad tiene algo que ver con una adecuación entre lo que se dice y lo que es el caso, como la idea de que de algún modo el predicado de verdad es un predicado redundante, pero las conclusiones que saca de estas intuiciones son muy diferentes de las que se defienden en las teorías de la redundancia y de la correspondencia.

Antes de tratar de explicar el significado de “es verdadero”, Tarski quiere fijar las condiciones que ha de cumplir cualquier definición de verdad para ser una definición aceptable: adecuación material y adecuación formal. Una explicación o caracterización de la verdad ha de adecuarse a su propiedad de la redundancia. Es lo que Tarski llama *adecuación material* de una teoría de la verdad: cualquiera que afirme o niegue p, ha de estar dispuesto a afirmar o negar “p es verdadero”.

Una definición correcta ha de implicar todas las equivalencias al enunciado “«La nieve es blanca» es verdadera si y sólo si la nieve es blanca”, es decir, una definición será *materialmente* aceptable si se ajusta al esquema:

“p” es verdadera si y sólo si p

donde p es un enunciado cualquiera, que en su primera ocurrencia está siendo nombrado y en su segunda ocurrencia está siendo usado.

Una definición será *formalmente* adecuada si la definición se da *en* un metalenguaje *para* un lenguaje-objeto; lo que se define, entonces, no es “ser verdadero”, sino “ser verdadero en L”. De modo que la condición material está mejor expresada así:

(T) X es verdadera si y sólo si p

donde X es un nombre de un enunciado E y p una traducción de E.

Esta forma de la definición de verdad nos podría llevar a pensar que el predicado de verdad es trivial y la teoría semántica tarskiana no es sino una versión refinada de la teoría de la redundancia. Sin embargo dicha forma nos ofrece algo más que una mera redundancia. La no trivialidad

de la definición tarskiana está precisamente en esa distinción de dos niveles de lenguaje: en uno se usan las oraciones, en el otro se mencionan para afirmar algo sobre ellas. Es una definición de la verdad aplicada a oraciones y no a la proposición o pensamiento que algunas oraciones expresan. Pero lo que en un principio puede parecer una ventaja termina siendo solamente (que no es poco) una teoría semántica del significado de las fórmulas de un lenguaje formal.

Esta definición es el punto de partida de Tarski para poder introducir las condiciones de verdad de los operadores lógicos de un lenguaje formal L como el significado de los esquemas de enunciados (fórmulas) que pertenecen a L. Se presupone que construimos un cálculo lógico tomando en primer lugar un conjunto de signos no interpretados y, una vez establecidas las reglas de formación de fórmulas, proporcionamos una regla (recursiva) para correlacionar cada fórmula con un significado en términos de condiciones de verdad. Así, desde un metalenguaje para el cálculo, damos a éste una interpretación. El metalenguaje utilizado no es sino el lenguaje natural.

Su límite está en que partimos de fórmulas atómicas no interpretadas (p, q, etc.) y decimos bajo qué condiciones las fórmulas no atómicas, compuestas a partir de aquéllas ($\neg p$, $p \wedge q$, $p \vee q$, $p \rightarrow q$, etc.), serán verdaderas. Pero ¿dónde queda nuestra pregunta por el significado de "es verdadero" tal y como es usado ese predicado en el lenguaje ordinario, es decir, aplicado también a oraciones simples?

Si prestamos un poco más de atención a la propuesta tarskiana, la definición recursiva de verdad para lenguajes formales contiene esa relación que intuitivamente reconocemos entre la verdad y la realidad. Esta intuición se encuentra recogida en la definición de las condiciones de verdad de las fórmulas *predicativas* atómicas. Su definición completa es la siguiente:

1. Una oración con la estructura "$p \wedge q$" es verdadera si y sólo si "p" es verdadera y "q" es verdadera.
2. Una oración con la estructura "$\neg p$" es verdadera si y sólo si "p" es falsa.
3. Una oración con la estructura "$\exists x \varphi[x]$", donde "$\varphi[x]$" significa que en la expresión "φ" se presenta la variable "x" libre, es verdadera si y sólo si por lo menos una de las oraciones, que se diferencian de "$\varphi[x]$" por tener un término singular en lugar de "x", es verdadera.
4. Una oración con la estructura "Pa" es verdadera, si y sólo si el objeto que se designa mediante el término singular "a" cae bajo el concepto que representa el término general "P".

Estas cuatro definiciones parciales se completan con un par de listas que correlacionan las constantes individuales con objetos (descritos en lenguaje natural) y las letras predicativas con conceptos (descritos en lenguaje natural).

Las condiciones de verdad señaladas para las fórmulas atómicas del lenguaje formal predicativo son las que ligan la definición total con la realidad. La ventaja de esta teoría sobre las dos anteriores (redundancia y adecuación) es que ya no tenemos que comparar dos estados de cosas, no se trata de buscar el hecho representado por "*Pa*" en la realidad (¿existe algún hecho negativo representado por "¬*Pa*"?), sino que se trata de tomar el objeto designado por "*a*" e investigar si tiene o no la propiedad representada mediante "*P*".

Ahora bien, la definición de Tarski no llega a decirnos cómo identificar el objeto designado por "*a*" (más allá de su asociación con un nombre propio del lenguaje natural) ni cuál es el predicado o concepto asociado a "P". Para resolver esta cuestión abierta, Tugendhat[12] propone modificar la cuarta definición parcial del siguiente modo:

4.a. "*Pa*" es verdadero, si *P* es aplicable de acuerdo con *su* regla de uso, al objeto al que se había llegado por medio de la regla de *identificación* de *a*.

Saber qué objeto designa un nombre propio es conocer su *regla de identificación* y saber qué significa un nombre funcional es conocer su *regla de uso*, saber cómo se usa el nombre.

Tarski presenta una definición de verdad en términos de satisfacción: determinamos qué objetos (o tuplas de objetos) satisfacen una función y llamamos verdadero al enunciado resultante de completar una función con el o los objetos que la satisfacen. Pero esta teoría semántica no es propiamente una definición de la verdad, sino que únicamente fija la extensión del predicado "es verdadero" en un lenguaje artificial determinado L. La reducción de la noción de verdad a las de satisfacción y referencia se lleva a cabo mediante definiciones parciales:

Dado el alfabeto de *L* y sus reglas de formación de expresiones de *L* (reglas de formación de fórmulas),

a) se determina la referencia de cada una de sus constantes individuales (por ejemplo: *a* en *L* denota Madrid),

[12] Cfr. TUGENDHAT, E. (1997): § 13.4.

b) se especifican las condiciones de satisfacción de los predicados de *L* (por ejemplo: un objeto satisface el predicado *P* en *L* si y sólo si es una ciudad), y

c) se especifican las condiciones de verdad de cada enunciado de *L* (por ejemplo: un enunciado que consta de un nombre propio, *a*, y un predicado monádico, *P*, es verdadero si y sólo si el objeto denotado por el nombre propio satisface dicho predicado monádico).

Pero estas definiciones parciales presuponen dadas las constantes lógicas. De hecho Tarski reconoce que lo único que podemos hacer es dar una lista de las expresiones lógicas, pues no hay ningún fundamento objetivo que nos permita establecer una distinción entre expresiones lógicas y expresiones no lógicas. Lo que Tarski hace es reducir la noción de verdad a otras nociones semánticas: referencia de un nombre propio a un objeto y satisfacción de un predicado por tuplas de objetos (más las condiciones de verdad de la negación, la disyunción y la generalización existencial).

Podríamos resumir la propuesta semántica de Tarski en las cuatro siguientes afirmaciones:

1) La verdad se predica de enunciados.

2) Toda teoría adecuada de la verdad se ha de establecer en un metalenguaje para un lenguaje *L*, cuya sintaxis está claramente especificada, es decir, no se define la verdad en general, sino la verdad-en-*L*, el significado de "es verdadero" para un lenguaje formal *L*.

3) No hay una definición de la verdad que valga para todo lenguaje, es decir, no se puede dar una definición absoluta de la verdad, sino únicamente definiciones parciales relativamente a algún lenguaje.

4) La noción de verdad, para un lenguaje *L*, puede ser reducida a las nociones de satisfacción y referencia.

La ventaja de esta teoría sobre la teoría de la coherencia es que los coherentistas suponen que la verdad es una relación entre enunciados, mientras que la teoría semántica hace depender la verdad de algún tipo de relación entre los enunciados y la realidad. Por su parte, la teoría de la correspondencia explica la verdad como una relación entre enunciados y hechos, pero describir el hecho con el que se corresponde un enunciado sin utilizar enunciados (pretendidamente verdaderos por describir *ese* hecho) es tarea imposible. Según esta teoría la supuesta entidad que se

corresponde con el enunciado no sería el objeto o los objetos a los que se aplica el predicado, sino el objeto con todas las propiedades que el enunciado describe. La teoría de Tarski, en cambio, sólo necesita asociar arbitrariamente objetos con nombres propios, pero no hechos con enunciados. Decir que un objeto satisface un predicado es muy diferente a decir que un hecho se corresponde con un enunciado.

Tarski mantiene la intuición de la teoría de la correspondencia de que la verdad tiene algo que ver con la realidad, que un enunciado sea o no verdadero depende de cómo es el mundo, pero evita la dificultad de tener que señalar hechos en el mundo. El realismo de la teoría de Tarski se limita a la aceptación de que hay algo extralingüístico en virtud de lo cual los enunciados son verdaderos o falsos. La verdad es una relación entre oraciones abiertas y objetos que las *satisfacen*; no se trata estrictamente de una correspondencia entre el portador de verdad y el mundo, sea como un todo, sea por isomorfismo estructural, sino más bien de un movimiento entre distintos niveles lingüísticos.

Pero al aplicar la verdad a las oraciones y no a su contenido (proposiciones) seguimos sin poder analizar los enunciados de tipo "todo lo que dice *a* es verdadero". Para poder dar cuenta de estos enunciados, necesitamos no sólo una teoría de la verdad, sino también una teoría del significado. ¿Puede ser la teoría semántica de la verdad también una teoría del significado?

Habitualmente se dice que el significado de un enunciado resulta de la composición de los sentidos de las expresiones que lo conforman (principio de composicionalidad) y viene dado por las condiciones de verdad (principio veritativo-funcional). Con esto no se atiende bien a la distinción fregeana entre el sentido y la referencia: la referencia de un enunciado complejo (su valor de verdad) es el valor de una función (la negación, la disyunción, etc.) y es en el plano de las referencias donde podemos hablar de un principio de composicionalidad; pero el sentido de un enunciado no procede de los sentidos de las expresiones que lo componen, sino todo lo contrario, en relación con el sentido tenemos que hablar del principio del contexto o de un cierto holismo moderado. No debemos preguntar por el significado de una expresión aislada, sino únicamente en el contexto de un enunciado. Conocer el sentido completo de una expresión puede ser una tarea imposible, pues eso significaría que conocemos todos sus posibles usos en el lenguaje. Ahora bien, en el lenguaje formal de la lógica prescindimos de los contenidos de los enunciados (sentidos) y atendemos únicamente a su composicionalidad en términos meramente

referenciales. Una teoría del significado para el lenguaje de la lógica se puede reducir a una teoría de las condiciones de verdad.

Davidson discute la compatibilidad de la definición tarskiana con los principios del Empirismo Lógico. Hay una equivalencia extensional entre *verdad-en-L* y *satisfacción-en-L*, pero la cuestión es si dicha equivalencia es suficiente para reducir las nociones semánticas a entidades empíricas con sus propiedades y relaciones. Davidson encuentra dificultades para aplicar la teoría de Tarski a los lenguajes naturales, pero Tarski reconoce que su teoría no se aplica a las ciencias empíricas ni al lenguaje natural, por tratarse de lenguajes semánticamente cerrados, es decir, lenguajes que no respetan la distinción entre lenguaje-objeto y meta-lenguaje, lenguajes que tienen capacidad para hacer referencia a sus propias expresiones, lo cual genera paradojas semánticas. Sin embargo el que un lenguaje sea semánticamente cerrado no lo convierte en una herramienta inútil para la ciencia, el lenguaje de la aritmética, por ejemplo, tiene esa capacidad expresiva. Kripke señala que la autorreferencia puede ser legítima en algunos casos y no siempre las paradojas semánticas se presentan como consecuencia de la riqueza expresiva del lenguaje, sino que algunas son causadas por los hechos empíricos y no por la autorreferencia.

Supongamos, por ejemplo, que el único enunciado que Juan emite sobre Watergate es el siguiente:

> La mayoría de las afirmaciones que Nixon hace sobre Watergate son falsas

Esta es una afirmación cuya verdad depende de hechos empíricos. Ninguna norma sintáctica o semántica evitará que hagamos afirmaciones de este tipo y, sin embargo puede llevarnos a una paradoja. Pongamos que podemos listar las afirmaciones de Nixon y podemos determinar el valor de verdad de todas ellas excepto el de una, de modo que tenemos tantas afirmaciones hechas por Nixon sobre Watergate verdaderas como falsas; la afirmación que no sabemos dónde colocar es la que determinaría si el enunciado de Juan es verdadero o falso. Pero esa afirmación de Nixon es extremadamente problemática:

> Todas las afirmaciones de Juan sobre Watergate son verdaderas

Si colocáramos esta afirmación en el conjunto de las verdades afirmadas por Nixon (sobre Watergate), la mayoría de las afirmaciones que Nixon hace sobre Watergate serían verdaderas y el enunciado de Juan

también sería verdadero (es lo que dice la afirmación problemática de Nixon). Pero si la mayoría de las afirmaciones de Nixon son verdaderas, el enunciado de Juan tiene que ser falso, lo cual nos lleva a una contradicción.

Si colocamos la afirmación problemática entre las falsedades afirmadas por Nixon, entonces el enunciado emitido por Juan es falso (recordemos que es la única afirmación que Juan hace sobre Watergate) y eso significa que la mayoría de las afirmaciones de Nixon son verdaderas, lo cual también nos lleva a una contradicción[13].

Este tipo de enunciados está poniendo de manifiesto las dificultades que también tiene la teoría semántica de la verdad para explicar los usos de "es verdadero" en enunciados de tipo "Todo lo que dice *a* es verdadero".

Davidson trata de aprovechar la definición semántica tarskiana para elaborar una teoría del significado que pueda aplicarse también a los lenguajes naturales. Acepta que la noción de significado es problemática y no admite una definición completa, sin embargo es posible un análisis parcial de ella. Mientras que el concepto lógico de verdad es un concepto extensional, el concepto de significado es uno intensional. En un contexto extensional, la sustitución de un enunciado componente por otro con la misma referencia, el mismo valor de verdad, no altera el valor de verdad del enunciado compuesto[14]. En contextos intensionales, en cambio, no está asegurada la conservación de la verdad cuando se sustituye cualquier expresión por otra con la misma referencia. Los contextos intensionales no son veritativo-funcionales. Las relaciones de dependencia de los sentidos se han de buscar en el lenguaje como un todo.

Este planteamiento de lo que puede ser una teoría del significado recibe las críticas de Dummett, quien entiende que cualquier teoría del significado que incorpore como concepto central el de verdad, es una teoría realista y él quiere defender un anti-realismo. Para ello propone eliminar el recurso a las condiciones de verdad y explicar el significado en términos de condiciones de aserción o condiciones de verificación. La caracterización que Dummett hace del realismo es muy discutible, pero al menos es claro al decirnos cuáles son los compromisos que él quiere

[13] Cfr. KRIPKE, S. (1984): "Tanto Nixon como Juan pueden haber hecho sus proferencias respectivas sin darse cuenta de que los hechos empíricos las hacen paradójicas".

[14] El hecho de que se muestre aquí el principio leibniciano de sustitución de los idénticos *salva veritate* es el principal motivo de Frege para considerar que los valores de verdad son objetos abstractos —clases— y la referencia de los enunciados.

rechazar. Dummett caracteriza el realismo como el compromiso con las siguientes afirmaciones:

(1) Hay algo en el mundo, independiente de nuestras capacidades para conocerlo, que es lo que hace que nuestros enunciados sean verdaderos o falsos.

(2) El significado de los enunciados viene determinado por sus condiciones de verdad, que son independientes de nuestras posibilidades de verificación.

(3) Todo enunciado es o bien verdadero o bien falso (principio de bivalencia) independientemente de nuestras capacidades para saberlo; el tercero excluido ($\alpha \vee \neg\alpha$) es una verdad lógica.

Estos tres compromisos, dice Dummett, son interdependientes, la aceptación de cualquiera de ellos lleva a la aceptación de los demás. Son tres aspectos del realismo: (1) expresa el realismo metafísico, (2) el semántico y (3) el realismo lógico. De modo que rechazar este realismo conlleva el rechazo de cada una de esas afirmaciones. La posición antirealista de Dummett queda caracterizada por el compromiso con las tres afirmaciones (metafísica, semántica y lógica) siguientes:

(1') La realidad es relativa a nuestro conocimiento.

(2') El significado de un enunciado viene determinado por sus condiciones de verificación y sus reglas de uso.

(3') La lógica no tiene por qué comprometerse con la bivalencia, pues ni la bivalencia ni su correspondiente expresión en el tercero excluido son principios fundamentales. Es la idea recogida en la lógica intuicionista.

En un principio Dummett quiere sustituir la teoría de las condiciones de verdad por una teoría de las condiciones de aserción, pero posteriormente, atendiendo a la distinción entre sentido y referencia, matiza su propuesta y sostiene que una parte del significado de los enunciados está constituida por sus condiciones de verdad, pero la parte más importante depende del uso. Ahora bien, aceptar que las condiciones de verdad son parte del significado de los enunciados no es aceptar que los enunciados son verdaderos o falsos con independencia de que nosotros lo sepamos. Las condiciones de verdad se manifiestan en la conducta de los usuarios de los enunciados: ha de haber una diferencia observable entre la conducta de quien sabe las condiciones de verdad de un enunciado y la de quien las desconoce.

Pero, podemos objetar, ¿cuáles son las condiciones de aserción, por ejemplo, de los contrafácticos?, ¿hay condiciones ideales de aserción? Dummett tiene una respuesta: quizás esos enunciados son indecidibles, la bivalencia no es universal. Un enunciado es verdadero si y sólo si hay una prueba para él. Si no disponemos de una prueba para un enunciado p, no podemos afirmar p y no tiene, entonces, sentido decir que p es verdadero ni que es falso.

II
LENGUAJE, SINTAXIS Y SEMÁNTICA

1. FORMA LÓGICA Y FORMA GRAMATICAL

En un argumento podemos reconocer distintas estructuras; según unas el argumento parece válido; según otras, no. ¿Cómo puede ser así? Decimos que un argumento es (lógicamente) válido por tener una forma lógica determinada, pero si nuestro lenguaje formal no permite capturar ninguna forma válida del argumento o no somos capaces de obtenerla, no podemos concluir que el argumento es inválido. Lo único que podríamos decir en este caso es que una forma determinada *F*, que el argumento tiene, es inválida. Esto sólo significa que la forma F no impide la posibilidad de que las premisas sean verdaderas y la conclusión falsa. Si el argumento resulta ser, después de todo, válido, no será por tener la forma *F*. La lógica valida un argumento cuando, una vez que aceptamos que tiene una estructura determinada *E*, puede probar que la estructura *E* es una forma de argumentación válida, pero el fracaso ya sea en el proceso de formalización, ya sea en el cálculo, no nos autoriza a pronunciarnos sobre su corrección o incorrección.

El método del contraejemplo puede ser útil para probar invalidez, pero será, de nuevo, invalidez de la *forma* que estamos considerando, no directamente del argumento, pues siempre podemos cuestionar el momento de la *formalización*.

Validez lógica y contradicción lógica se predican de una clase de instancias, de una estructura, que no siempre es fácil reconocer en las expresiones lingüísticas. No hay criterios claros ni menos aún métodos mecánicos para expresar en un lenguaje formal una estructura de una expresión en lenguaje natural, tal que podamos asegurar que se mantienen exactamente las mismas condiciones de verdad.

En general, llamamos "enunciado compuesto" al enunciado que contiene como parte propia uno o varios enunciados. Algunas oraciones enunciativas se pueden descomponer en dos o más oraciones también enunciativas, por ejemplo: "Madrid es una ciudad y es mucha la gente

que pasea por sus calles". El valor de verdad de los enunciados componentes es importante para el valor de verdad de la oración compuesta. En el caso de algunos enunciados, por ejenplo: "Cuando llueve, es poca la gente que pasea por la calle", no está tan claro que el pensamiento pueda descomponerse en dos pensamientos independientes, mejor dicho, no está claro que la afirmación del pensamiento condicional sea una composición de dos afirmaciones separadas.

La forma lógica del pensamiento expresado en los enunciados compuestos, que no se ha de confundir con la forma gramatical del enunciado, es aquella estructura profunda del enunciado que determina bajo qué condiciones es verdadero. Como dice Wittgenstein, "Comprender un enunciado quiere decir saber lo que es el caso si es verdadero. (Cabe, pues, comprenderlo, sin saber si es verdadero). Se comprende si se comprenden sus partes integrantes"[15]. Conocer el significado de un enunciado es conocer sus condiciones de verdad.

En este sentido, deberíamos hablar más bien de *forma semántica*. De hecho deberíamos acostumbrarnos a decir "formas lógico-semánticas" tanto en relación con los enunciados como en relación con los argumentos deductivos, pues lo más frecuente es que un enunciado o un argumento tenga más de una forma lógico-semántica.

El lenguaje formal no contiene enunciados, sino formas enunciativas o esquemas de enunciados; tampoco contiene argumentos, sino esquemas argumentativos. Dos enunciados distintos y que expresan pensamientos distintos, pueden tener la misma forma lógica. Dos enunciados distintos, que expresan pensamientos distintos y que tienen distintas formas lógicas, pueden ser formalmente equivalentes. Una vez obtenida una forma de un enunciado, a la lógica ya no le interesa el valor de verdad de los enunciados atómicos que pudiera contener, sino las posibilidades de verdad de cualquier enunciado compuesto con *esa* forma.

Las dos formalizaciones que se han tomado como paradigmáticas, en distintos momentos históricos, son la silogística de Aristóteles y la lógica clásica o estándar. Veamos cuáles son los elementos destacados en cada una de ellas.

2. SUJETO Y PREDICADO, FUNCIONES Y ARGUMENTOS

Según Aristóteles, la forma general de toda proposición es la de sujeto y predicado: con un enunciado afirmamos *algo* de *algo*. Los elementos

[15] WITTGENSTEIN, *Tractatus*, 4.024.

formales que nos permiten hacer una clasificación de los enunciados para posteriormente investigar qué relaciones se dan entre ellos son los que resultan de considerar la cantidad: *todos* y *algunos*, y la cualidad: *afirmación* y *negación*. Combinando estos cuatro elementos, obtenemos las cuatro clases básicas de enunciados: universales afirmativos, universales negativos, particulares afirmativos y particulares negativos.

¿Por qué Aristóteles utiliza en sus modelos deductivos únicamente términos sobre los cuales podemos aplicar la cuantificación, es decir, términos generales?, ¿qué pasa con los argumentos intuitivamente válidos que contienen términos singulares? Por ejemplo:

Todos los hombres son mortales.

Sócrates es un hombre.

Luego, Sócrates es mortal.

Una razón la podemos encontrar en el hecho de que la negación no se aplica a los términos singulares, tiene sentido decir "no ser mortal" o "ser no-mortal", pero no tiene sentido decir "no-Sócrates": una sustancia no tiene contrario. Además los términos generales pueden ocupar tanto la posición de sujeto como la de predicado, cosa que tampoco ocurre con los nombres propios. Esa propiedad es imprescindible en el sistema silogístico, pues es lo que permite la existencia de un *término medio* en cada silogismo. En los silogismos necesitamos términos que puedan cumplir tanto la función de predicado como la función de sujeto. Si quisiéramos utilizar un término singular en un silogismo, deberíamos tratarlo como si estuviéramos cuantificándolo (universal o existencialmente). Por ejemplo:

Todos los hombres son mortales.

Algún Sócrates es un hombre.

Luego, algún Sócrates es mortal.

Una limitación importante de la silogística es que, al disponer únicamente de conceptos de primer orden, sólo da cabida a la relación de subordinación entre conceptos. Frege, en cambio, considera conceptos de distintos niveles y objetos, lo cual le permite distinguir dos relaciones muy distintas entre conceptos: el *caer* un concepto *en* otro concepto y el *estar subordinado* un concepto *a* otro concepto, y explicar la cuantificación como predicado de segundo nivel y la identidad como predicado de primer nivel.

Frege separa definitivamente la forma lógica de la forma gramatical de los enunciados, si bien la sintaxis lógica evidentemente no es algo total-

mente extraño a la forma gramatical. Es en los enunciados mismos donde podemos reconocer la forma responsable de la verdad de clases de enunciados, es decir, los marcadores de sus condiciones de verdad, aunque en el proceso de formalización necesitamos muchas veces recurrir a traducciones o reformulaciones con la intención de subrayar dichos marcadores.

La forma gramatical sujeto-predicado es abandonada en favor de una distinción entre expresiones saturadas y expresiones no saturadas y su correspondiente distinción entre argumento y función.

> Si en una expresión (...) aparece un símbolo simple o compuesto en uno o más lugares, y si lo pensamos como reemplazable en todos o en algunos de estos lugares por algo distinto, pero siempre por lo mismo, entonces a la parte de la expresión que aparece sin cambio la llamamos función y a la parte reemplazable su argumento[16].

Un enunciado formado por un nombre propio y una expresión funcional podemos pensarlo como compuesto de dos partes, una de las cuales está completa mientras que la otra es incompleta. Por ejemplo, podemos descomponer "Sócrates es un hombre" en una expresión completa: "Sócrates" y una que muestra incompletud: "es un hombre". Las partes de un pensamiento no pueden ser todas completas, pues entonces no podrían ensamblar entre sí para formar el pensamiento.

Esta distinción básica facilita un mejor análisis de la cuantificación y la identidad: "Lo mejor sería expulsar definitivamente de la lógica las palabras «sujeto» y «predicado», puesto que siempre nos inducen al error de confundir las dos relaciones radicalmente distintas de caer un objeto bajo un concepto *y* [de la] subordinación de un concepto bajo otro concepto"[17].

En el significado de un término general se suele distinguir entre la intensión (concepto o relación, o de modo general: predicado) y la extensión (conjunto de objetos o de tuplas de objetos, que puede ser vacío, a los que se aplica el predicado). Limitándonos al caso más sencillo: Px es una función que toma sus argumentos de un conjunto de objetos y obtiene sus valores del conjunto $\{V, F\}$. Dos conceptos distintos pueden ser verdaderos de exactamente el mismo conjunto de objetos, es decir, pueden coincidir en extensión.

Podemos dividir las expresiones de nuestro lenguaje en dos conjuntos disyuntos: las que exhiben lugares vacíos y las que no, nombres de predicados y nombres de objetos. El mundo de las referencias queda dividido también en objetos y funciones.

---

16 FREGE, G. (1972): 28,9.

17 FREGE (1984a): 88,9.

En relación con la lógica proposicional, las variables enunciativas o proposicionales señalarían el lugar de los argumentos, mientras que las conectivas lógicas son expresiones no saturadas que representan funciones. Cuando los lugares argumentales son ocupados por enunciados obtenemos el valor de la función para esos argumentos.

Enunciados con la forma $p \wedge q$, $p \vee q$ y $p \rightarrow q$ tienen un valor de verdad sólo si lo tienen p y q; $\neg p$ tiene un valor sólo si lo tiene p. En lógica clásica bivalente, para que sea verdadero $\neg p$, ha de ser falso p; para que sea verdadero $p \wedge \mathrm{q}$, ha de ser verdadero p y también q; para que sea verdadero $p \vee q$, basta que sea verdadero p o lo sea q y para que sea verdadero $p \rightarrow q$, basta que sea falso p o verdadero q.

Si aceptamos que comprender el significado de un enunciado es saber sus condiciones de verdad y si el valor de verdad de un enunciado compuesto depende de los valores de verdad de sus enunciados componentes más el modo de composición, podemos pensar el modo de composición (la forma) como una función de verdad, es decir, una función cuyos argumentos son los valores de verdad de los enunciados componentes y cuyo valor resultante es el valor de verdad del enunciado compuesto.

Pero la división en funciones y argumentos no sólo se aplica al análisis de la composición de enunciados. Frege distingue cuatro tipos de expresiones funcionales:

(1) Operadores proposicionales: Por ejemplo: “si (), entonces ()”. Tanto sus argumentos como sus valores son valores de verdad. Por eso decimos que son funciones de verdad. Por ejemplo, para los argumentos <*V*, *F*> el valor de la función es *F*.

(2) Predicados en general: monádicos (conceptos) y n-ádicos (relaciones n-ádicas). Estas funciones toman sus argumentos de un dominio de objetos y sus valores para cada argumento (o tuplas) del conjunto {*V*, *F*}. Por ejemplo, “... es filósofo”, el valor de la función para el argumento *Sócrates* es *V*.

(3) Operadores de segundo nivel: los cuantificadores. Los veremos detenidamente en el próximo capítulo.

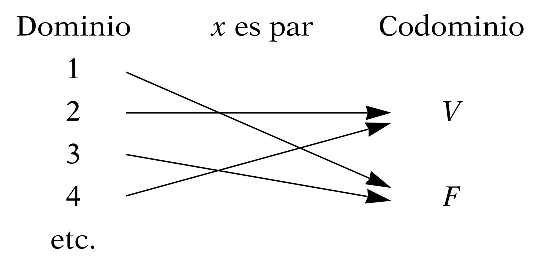
(4) Operadores “objetuales”. Por ejemplo: “la capital de ()”. Tanto sus argumentos como sus valores son objetos individuales concretos, por ejemplo: para el argumento *Navarra* el valor de la función es *Pamplona*.

Este nuevo lenguaje formal nos permite representar formas argumentativas responsables de la validez de algunos argumentos, que la silogística no podía explicar.

Tomemos un enunciado elemental, con un solo nombre propio y un predicado: "Sócrates es mortal". Podemos pensar el enunciado como pudiendo cambiar ese nombre propio por otro: "Platón es mortal". Ahora podemos señalar ese hecho limitándonos a indicar el lugar del nombre: "*x* es mortal". Hemos obtenido una función, una expresión que no enuncia nada y no es, por tanto, ni verdadera ni falsa, sino que puede decirse con verdad de algún objeto. Es una de esas funciones especiales destacadas como *conceptos*: aplicada a un objeto, obtenemos como valor de la función un valor de verdad. Lo que hacemos es asimilar los términos generales de nuestro lenguaje natural a las funciones matemáticas: dependiendo de los argumentos que tome una función alcanzará un valor u otro. Por ejemplo, la función x^2 aplicada a números naturales podemos representarla así:

Dominio	x^2	Codominio
1	⟶	1
2	⟶	4
3	⟶	9
etc.		

El codominio de las funciones lógicas siempre es el conjunto {*V*, *F*}. Siguiendo con los números naturales, la función "*x* es par" podemos representarla así:



Si en "x^2" sustituimos la variable "*x*" por un numeral, por ejemplo el "3" obtenemos un nombre propio del número 9: "3^2". Si en "*x* es mortal" sustituimos la variable "*x*" por el nombre propio "Sócrates", lo que obtenemos es un enunciado que puede ser tomado como el nombre de un valor de verdad: lo verdadero, por ser el valor de la función para ese argumento.

Todo esto es discutible, en particular la idea de que los valores de verdad son objetos, pero de momento los aceptaremos como objetos abstractos similares a los conjuntos. Lo que quiero señalar ahora son las ventajas del nuevo análisis de la forma de los enunciados en argumentos y funciones. La función que estamos manejando como ejemplo, "*x* es mortal", no sólo queda saturada cuando la completamos con un argumento, sino que tenemos también otro modo de alcanzar un enunciado con un valor de verdad: ligando la variable con un cuantificador: $\forall x$ (*x* es mortal) o bien $\exists x$ (*x* es mortal). Pero no todas las funciones son monádicas, es decir, no todas contienen sólo un lugar argumental. También hay funciones que han de ser saturadas por más de un argumento para poder alcanzar un valor de verdad, y aquí es donde este análisis se muestra claramente más potente que la silogística para explicar la validez debida a la estructura interna de los enunciados: en el hecho de que podemos cuantificar sobre dos o más variables distintas.

Por ejemplo, si en "Platón conoce a Sócrates" pensamos los lugares ocupados por los nombres propios, "Platón" y "Sócrates", como lugares que pueden ser ocupados también por otros nombres propios cualesquiera, "*x* conoce a *y*", y tratamos de saturar la función resultante mediante cuantificación, nos damos cuenta de que ya no tenemos dos, sino cuatro maneras de hacerlo:

todo *x* conoce a todo *y*	$\forall x\ \forall y$ (*x* conoce a *y*)
algún *x* conoce a todo *y*	$\exists x\ \forall y$ (*x* conoce a *y*)
todo *x* conoce a algún *y*	$\forall x\ \exists y$ (*x* conoce a *y*)
algún *x* conoce a algún *y*	$\exists x\ \exists y$ (*x* conoce a *y*)

Ahora bien, en un enunciado con la forma "*Pa*" podemos variar tanto "*a*" como "*P*". En lógica de primer orden hacemos lo primero, en lógica de segundo orden también lo segundo. Ocupando el lugar de "*a*" con una variable obtenemos "*Px*". En un segundo paso podemos considerar las letras predicativas como variables que representan *lugares* de predicados (aunque nos neguemos a cuantificar sobre ellos). Cuando en lógica clásica de primer orden decimos, por ejemplo, que si todo *P* es *Q* y todo *Q* es *R*, (necesariamente) entonces todo *P* es *R*:

$$\frac{\begin{array}{c}\forall x\ (Px \to Qx)\\ \forall x\ (Qx \to Rx)\end{array}}{\forall x\ (Px \to Rx)}$$

estamos diciendo que esa relación lógica se da sean lo que sean *P*, *Q* y *R*, con tal de que se trate de predicados de primer nivel monádicos. Si hay predicados *P*, *Q* y *R* tales que *P* está completamente contenido en *Q* y *Q* en *R*, podemos estar completamente seguros de que *P* está contenido en *R*. Con las letras enunciativas *p*, *q*, *r*, ..., ocurre lo mismo que con los términos generales, a veces las tomamos como constantes, a veces las tomamos como variables que representan *lugares* de enunciados. Cuando hacemos lo segundo estamos queriendo poner de manifiesto que se da una cierta relación lógica en virtud únicamente de la *forma de composición* y no del contenido de los enunciados componentes. Por ejemplo, el esquema argumentativo

$$\frac{\begin{array}{c} p \rightarrow q \\ q \rightarrow r \end{array}}{p \rightarrow r}$$

es válido para cualquier instancia de *p*, *q* y *r*. También podemos usar un metalenguaje para señalar mejor ese hecho:

$$\frac{\begin{array}{c} \alpha \rightarrow \beta \\ \beta \rightarrow \gamma \end{array}}{\alpha \rightarrow \gamma}$$

de modo que α, β y γ no representan ya enunciados ni $\alpha \rightarrow \beta$ es un esquema enunciativo, sino que α, β y γ representan fórmulas.

La aplicación de la teoría de las funciones al análisis de los enunciados atómicos es la gran ventaja de la nueva formalización. Ahora podemos recoger en el lenguaje lógico expresiones para nombrar objetos, formalizar contando tanto con expresiones para términos generales como con expresiones para términos singulares, lo cual permitirá poner en relación el dominio de una función con el dominio de otra, así como señalar las propiedades lógicas de un predicado diádico especial: el predicado de identidad, que es uno de los significados del verbo "ser".

Frege distinguió cuatro significados con los que podemos usar el verbo "ser":

(1) Para expresar que un objeto *cae bajo* un concepto, es decir, predicar algo de un objeto o, dicho en términos extensionales, que un objeto *pertenece a* un conjunto. Ejemplo: "Sócrates es mortal".

(2) Para expresar una relación de *subordinación* entre conceptos o, dicho en términos extensionales, que un conjunto está *incluido en* otro. Ejemplo: "La ballena es un mamífero".

(3) Para expresar *identidad*. Ejemplo: "Hesperus es Phosphorus".

(4) Para expresar *existencia*. Este significado está contenido en usos que contienen también alguno de los otros significados. Ejemplo: "Algunos hombres son mortales" ($\exists x\ (Px \wedge Qx)$ / $P \cap Q \neq \emptyset$). Un ejemplo presente casi sólo en el discurso filosófico es: "Sócrates es".

La existencia no es un predicado de objetos, sino un predicado de predicados, un predicado de segundo nivel, nos dice algo sobre los conceptos: si son o no vacíos. De modo que un enunciado como "Sócrates es" está incorrectamente formado, lo que se quiere decir con él es que hay un hombre llamado "Sócrates" ($\exists x\ (Px \wedge x = a)$).

En "Sócrates es" el "es" es el predicado gramatical, pero lógicamente es un cuantificador. En (1), (2) y (3) el "es" forma parte del predicado. Pero si hacemos un análisis más fino vemos que el "es" de (3) está flanqueado por dos nombres propios, lo cual nos indica una identidad: el objeto denotado por "Hesperus" es (el mismo que) el objeto denotado por "Phosphorus" ($a = b$). En (1) señalamos que un objeto determinado, Sócrates, cae bajo un concepto: ser mortal (Pa). Hablando extensionalmente, ese "es" indica una relación de pertenencia: Sócrates es un elemento del conjunto de los mortales ($a \in P$). Esta es una relación muy diferente de la expresada por el "es" de (2). Gramaticalmente, el sujeto es "la ballena" y el predicado "es un mamífero", pero la expresión "la ballena", a falta de un contexto determinado de emisión, que pudiera indicarnos que estamos haciendo un uso deíctico: "*esta* ballena", no está siendo usada para nombrar un objeto determinado, ni uno concreto ni uno abstracto, como el conjunto de las ballenas; no es el conjunto de las ballenas lo que es un mamífero, sino cada uno de sus elementos, "la ballena" significa lo mismo que "las ballenas", "todas las ballenas", "cada ballena". ¿Cuáles son las condiciones de verdad del enunciado "la ballena es un mamífero"?: tome usted una cosa cualquiera del mundo, si es una ballena, entonces también es un mamífero. El "es" de (2) indica una subordinación de conceptos ($\forall x\ (Px \rightarrow Qx)$), una relación de inclusión entre sus extensiones: el conjunto de las ballenas está incluido en el conjunto de los mamíferos ($P \subset Q$). (2) es una afirmación acerca de una relación entre conceptos: el concepto *ballena* está subordinado al concepto *mamífero*, algo muy distinto de la afirmación de la relación *caer* un objeto *bajo* un concepto. Cualquier cosa que caiga bajo el concepto *ballena* cae bajo el concepto *mamífero*.

Con este análisis de los significados del verbo ser y la distinción entre nombres propios (expresiones completas que hacen referencia a objetos)

y nombres de funciones (expresiones con lugares vacíos que significan conceptos o relaciones) tenemos los elementos básicos para analizar el significado de los enunciados y determinar su estructura lógica.

3. ANÁLISIS DEL SIGNIFICADO

Los enunciados se usan para hacer afirmaciones con pretensión de verdad. Esa pretensión de verdad es lo que llamamos "fuerza asertiva". Una proposición la podemos utilizar sin fuerza asertiva, por ejemplo, cuando la usamos para hacer una pregunta. El pensamiento contenido en la pregunta muchas veces es el mismo que se pone en la afirmación, lo único que falta es la fuerza asertiva. Con esta distinción, podemos defender la idea de que al afirmar un enunciado de tipo condicional no estamos pretendiendo que es verdadero el antecedente ni tampoco que es verdadero el consecuente, afirmamos la relación condicional entre ambos, pero ninguno de ellos por separado. Utilizando el símbolo "$\vdash$" para la afirmación, podemos decir que

$$\vdash p \rightarrow q$$

no equivale ni a

$$\vdash p$$

ni a

$$\vdash q$$

ni a algo como

$$\vdash p \rightarrow \vdash q.$$

¿Hay una fuerza negadora al lado de la fuerza asertiva?, ¿qué hacemos al negar un enunciado? Las oraciones negativas no tienen ninguna fuerza negadora, sino también una fuerza asertiva. En primer lugar, no hay una diferencia clara entre oraciones negativas y oraciones afirmativas. Consideremos el siguiente ejemplo[18]:

1. Cristo es inmortal
2. Cristo tiene vida eterna
3. Cristo no es inmortal

[18] Ejemplo dado por Frege en "Una investigación lógica: la negación". Cfr. FREGE, G. (1984b): 86ss.

4. Cristo es mortal
5. Cristo no tiene vida eterna

¿Cuáles de esas oraciones son afirmativas y cuáles negativas?

Lógicamente hablando no podemos decir que una oración es negativa en sí misma, sino únicamente que existe otra oración tal que es falsa si ella es verdadera. La negación no determina una clase lógica de oraciones, sino que es una función monádica que se aplica a proposiciones. Aplicada al consecuente de un condicional, por ejemplo, nos indica que el operador no cubre propiamente oraciones como entidades lingüísticas, sino las proposiciones que contienen, es por ello por lo que podemos aplicar reglas como el Modus Tollens. La negación aplicada a un pensamiento genera otro pensamiento, que también puede ser afirmado como verdadero. Al negar una proposición no negamos su afirmación, sino que más bien afirmamos su negación.

Para formalizar enunciados debemos discutir qué términos generales contienen y cuál es su significado, si se aplican a un argumento o a varios. Por ejemplo, en "Las ciudades están habitadas" tenemos dos términos generales: "ciudad" y "habitadas", que corresponden a dos expresiones funcionales: "es una ciudad" y "está habitada". Pero también sabemos que la segunda de esas funciones, a diferencia de la primera, no es monádica, sino que cubre un par de argumentos: "(algo) está habitado por (algo o alguien)". Antes de la formalización siempre se produce una discusión sobre los significados y sobre qué enunciados serían equivalentes a un enunciado dado en relación con aquella parte del significado importante para la verdad.

El análisis no procede según normas o reglas mecánicas, pero disponemos de algunas estrategias que nos ayudan: localizar los cuantificadores en el lenguaje natural: "todo ... algún ... todo ...". Lo que queda son nombres propios o términos singulares de objetos o bien nombres de propiedades o relaciones (predicados monádicos, diádicos, etc.), más los marcadores lógicos proposicionales.

Consideremos, por ejemplo, "Algunas manzanas son amargas". Su sujeto gramatical es "algunas manzanas" y su predicado "son amargas"; pero su forma lógica es otra, que se hace más explícita si transformamos ese enunciado en otro que expresa el mismo pensamiento: "Hay manzanas amargas": *hay* cosas que son manzanas *y* son amargas.

Analizar la forma lógica de un enunciado es analizar la forma de una proposición. Así, el significado de "Juan es alto", por ejemplo, no es una

composición del significado de "Juan" y el significado de "() es alto", como si esos significados estuvieran al mismo nivel. Objetos y conceptos son entidades de distinto nivel: un objeto *cae bajo* un concepto, el concepto *subsume* objetos (caso límite: concepto vacío).

Hasta cierto punto podríamos entender la idea prefregeana de que enunciados con la forma "Algunos *P* son *Q*" significan que hay un subconjunto en *P* que tiene la propiedad *Q*, pero esto sería incorrecto, porque no es de un conjunto de lo que predicamos *Q*, sino de sus elementos. Además, ese análisis es completamente inaplicable a otros casos como "Nada es *P*", "Todos los *P* tienen cierta relación con algunos *Q*", "Ningún *P* es *Q*", "Algunos *P* no son *Q*", etc.

Un ejemplo que, según algunos autores, no es validable en la lógica silogística es el siguiente: "Todos los círculos son figuras. Pedro dibuja un círculo. Por tanto, Pedro dibuja una figura". La validez de este argumento viene de una de las formas lógicas que el nuevo análisis permite poner de manifiesto:

$$\frac{p \quad q}{r} \qquad \frac{\forall x\,(Cx \rightarrow Fx) \quad Ra}{Sa} \qquad \frac{\forall x\,(Cx \rightarrow Fx) \quad \exists x\,(Cx \wedge Dax)}{\exists x\,(Fx \wedge Dax)}$$

Estas son tres formas distintas que el argumento tiene. Sólo la última es una forma tal que cualquier argumento que la tenga será un argumento válido, y lo será porque esa forma impide el paso de premisas verdaderas a conclusión falsa. Un argumento que comparta con este la segunda de las formas que tiene, por ejemplo, no sabemos a priori si será válido o no. Si es válido, no lo es por tener esa segunda forma señalada, sino por tener una forma lógica (otra) válida.

Veamos otro ejemplo menos discutible. Sea el argumento: "Puesto que algunos lógicos son criticados por todos los lógicos, algún lógico se critica a sí mismo". Una de sus formas lógicas es la siguiente:

$$\frac{\exists x\,(Lx \wedge \forall y\,(Ly \rightarrow Cxy))}{\exists x\,(Lx \wedge Cxx)}$$

En primer lugar, tenemos el predicado "() es un lógico", cuya extensión puede ser vacía o no. La función de segundo nivel "algunos" indica que ese conjunto (la extensión del predicado) no está vacío: *hay* lógicos. Pero tenemos también un cuantificador universal, que como siempre nos dirá algo sobre algún predicado. Este cuantificador alcanza al predi-

cado monádico “() es un lógico” y al predicado diádico “() es criticado por ()”. Con la nueva lógica, podemos afirmar una relación *R* entre todos o algunos de los que tienen cierta propiedad *L*, y todos o algunos de los que tienen esa misma propiedad u otra distinta *Q*. A menos que salgamos de la forma gramatical sujeto / predicado, no podremos establecer las condiciones de verdad de ese tipo de enunciados. Pero para hacer explícita la forma lógica de un argumento o de un enunciado hemos de recurrir a la noción de significado: ¿qué queremos decir con tal o cual argumento o con tal o cual enunciado?, ¿hay alguna invariante en el significado de los enunciados que contienen las expresiones “todos” o “algunos”?

Los enunciados que contienen generalidad (algunos / todos) remiten siempre a otros enunciados:

“Hay cosas que son *P* y *Q*” remite a “el objeto *a* es *P* y *Q*” o “el objeto b es *P* y *Q*” o “el objeto *c* es *P* y *Q*” o ...

“Todo lo que es *P* es también *Q*” remite a “si el objeto *a* es *P*, es *Q*” y “si el objeto *b* es *P*, es *Q*” y “si el objeto *c* es *P*, es *Q*” y ...

Entender ese tipo de enunciados es, otra vez, comprender cuáles son sus condiciones de verdad, qué tiene que ser el caso para que sean verdaderos.

El cuantificador universal cubre, salvo raras excepciones, un condicional que expresa una subordinación entre conceptos (una relación de inclusión entre sus extensiones), mientras que el cuantificador existencial va seguido de una conjunción, que indica la intersección no vacía entre extensiones de conceptos. De modo general, el proceso de transformación de una estructura lingüística en una lógica en los casos más sencillos sería el siguiente:

1. Algunos filósofos son poetas / Todos los hombres son mortales
2. Algunos *P* son *Q* / Todos los *P* son *Q*
3. Hay algo que es *P* y *Q* / Todo lo que es *P*, es *Q*
4. Alguna cosa: es *P* y es *Q* / Cada cosa: si es *P*, es *Q*
5. Alguna cosa, ella es *P* y ella es *Q* / Toda cosa, si ella es *P*, ella es *Q*
6. Alguna *x*, *x* es *P* y *x* es *Q* / Toda *x*, si *x* es *P*, *x* es *Q*
7. $\exists x$ (*x* es *P* y *x* es *Q*) / $\forall x$ (si *x* es *P*, entonces *x* es *Q*)
8. $\exists x$ (*x* es *P* $\wedge$ *x* es *Q*) / $\forall x$ (*x* es *P* $\rightarrow$ *x* es *Q*)
9. $\exists x\ (Px \wedge Qx)$ / $\forall x\ (Px \rightarrow Qx)$

A veces se olvida el lenguaje utilizado en el proceso de la formalización, sobre el cual siempre es posible plantear una discusión. Las líneas 2 a 8 de arriba contienen expresiones del lenguaje natural y expresiones del lenguaje formal, no siendo ninguna de ellas ni enunciados ni fórmulas. La no atención a este paso intermedio nos puede llevar a defender un formalismo extremo tanto como un naturalismo extremo, creyendo bien que la lógica es la encargada de dictar las normas de corrección de toda argumentación, bien que se ha de limitar a describir ("fotográficamente") los usos empíricos del lenguaje natural (¿cuál?).

Hemos señalado que un enunciado compuesto tiene valor de verdad, sólo si lo tiene cada uno de sus enunciados componentes, pero debemos puntualizar que esto no es así con toda generalidad. Hay enunciados compuestos que no son veritativo-composicionales; es lo que sucede en los discursos indirectos, por ejemplo: "Bush cree que España es una república". Si tratamos de descomponer ese enunciado en "Bush cree que" y "España es una república", vemos que aunque "España es una república" puede tener un valor de verdad, "Bush cree que" no es ningún enunciado, no expresa un pensamiento completo ni tiene, por tanto, un valor de verdad, de modo que su composición con "España es una república" no es una composición de valores veritativos. Es más, aunque "España es una república" tenga un valor de verdad, ese valor no es importante para el valor de verdad de "Bush cree que España es una república". Lo que importa de "España es una república" en este contexto es el pensamiento que expresa; lo que Bush cree es que ese pensamiento es verdadero, y puede muy bien ser verdadero que Bush cree que España es una república, a pesar de que eso es falso. También puede creer que el monstruo del lago Ness es un pez, aunque es dudoso que el enunciado "El monstruo del lago Ness es un pez" tenga un valor de verdad. En los contextos indirectos no podemos sustituir expresiones con la misma referencia *salva veritate*, sino que tendríamos que sustituir un enunciado por otro que expresara el mismo pensamiento (completo o incompleto, según el caso). Estos enunciados tienen la forma: "— cree que ...", que es la forma de una función con dos argumentos, pero los lugares argumentales recorren dominios distintos: el primer lugar ha de ser ocupado por el nombre de un objeto concreto (por ejemplo: "Pedro"), mientras que el segundo es un lugar para un enunciado (por ejemplo: "Madrid es una ciudad muy contaminada"). Lo que alguien cree es que una cierta proposición es verdadera, de modo que podemos decir que el primer lugar argumental recorre un dominio de objetos concretos, mientras que el segundo recorre un dominio de entidades abstractas.

4. SIGNIFICADO DE LOS OPERADORES LÓGICOS PROPOSICIONALES

¿Cuál es la lista de los marcadores lingüísticos de las condiciones de verdad de un enunciado, responsables de la validez de algunas composiciones de enunciados o de la derivabilidad de algunas conclusiones?, ¿cuál es la lista de las constantes lógicas?, ¿qué relación hay entre esas listas?, ¿hay sólo una o se pueden proponer varias distintas?, ¿son sus significados semánticos o sintácticos, o ambos?

Los sistemas lógicos pretenden traducir o capturar la forma o estructura de los argumentos (dados en el lenguaje natural), que es responsable de su validez. Podemos comenzar nuestra empresa (determinar cuáles de nuestras argumentaciones son válidas y por qué) observando las argumentaciones ordinarias, cómo funcionan en ellas las distintas partes, qué permanece invariante, si hay algo, en argumentaciones intuitivamente correctas, si podemos distinguir tipos de enunciados y tipos de argumentaciones, si las formas gramaticales son las responsables de su validez, si podemos reconocer alguna otra forma profunda en los enunciados y su encadenamiento en argumentaciones, etc. Después podemos tratar de definir un lenguaje formal capaz de representar las formas que intuitivamente creemos responsables de la relación de consecuencia lógica. Pero también podemos empezar al revés: definiendo un lenguaje formal y examinando después su aplicabilidad al lenguaje ordinario. Podemos, por ejemplo, tomar un conjunto con dos valores de verdad, $\{V, F\}$, y definir sobre él todas las funciones monádicas (4) y todas las diádicas (16). Después podemos tratar de reconocer en ellas algunos usos de expresiones en nuestro lenguaje ordinario, si bien este último paso de "traducción" es tan problemático como el de "formalización".

Funciones monádicas:

	G_1	G_2	G_3	G_4
V	V	V	F	F
F	V	F	V	F

Funciones diádicas:

	F_1	F_2	F_3	F_4	F_5	F_6	F_7	F_8	F_9	F_{10}	F_{11}	F_{12}	F_{13}	F_{14}	F_{15}	F_{16}
$V\,V$	V	V	V	V	V	V	V	V	F	F	F	F	F	F	F	F
$V\,F$	V	V	V	V	F	F	F	F	V	V	V	V	F	F	F	F
$F\,V$	V	V	F	F	V	V	F	F	V	V	F	F	V	V	F	F
$F\,F$	V	F	V	F	V	F	V	F	V	F	V	F	V	F	V	F

Por ejemplo, la función monádica G_3 transforma lo verdadero en falso y lo falso en verdadero, lo cual parece acomodarse a nuestro uso de la negación en castellano; la función diádica F_8 transforma pares de verdades en verdad y el resto de los pares de valores de verdad en falsedad, lo cual parece ser el comportamiento natural de nuestros conectores conjuntivos. Esto no está libre de discusión, tanto si lo pensamos como interpretación de las funciones del cálculo en el lenguaje natural como si lo pensamos como representación de los operadores lingüísticos en el lenguaje formal.

Para definir un sistema lógico hemos de definir un lenguaje *L*: presentar su alfabeto, definir qué sucesiones de signos del alfabeto de *L* tendrán algún significado en *L* y cuáles no, es decir, cuáles van a ser expresiones bien formadas de *L* (fórmulas), y definir el significado de dichas expresiones bien formadas, que se concreta en una definición de las expresiones propias de *L* (constantes lógicas). Por ejemplo, un sistema clásico proposicional S tiene:

1. Una especificación del *alfabeto* de su lenguaje *L*:
   a) Constantes proposicionales:
   $p, q, r, ..., p_1, p_2, ...$ para representar enunciados (que expresan proposiciones).
   b) Constantes lógicas: $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$.
   c) Símbolos de puntuación : (,).
2. Una definición inductiva de *fórmula* en *L*:
   a) Toda constante proposicional es una fórmula.
   b) Si α es una fórmula, $\neg\alpha$ es una fórmula.
   c) Si α y β son fórmulas, $(\alpha \wedge \beta)$, $(\alpha \vee \beta)$ y $(\alpha \rightarrow \beta)$ son fórmulas.
   d) Solamente las expresiones obtenidas mediante la aplicación de las reglas *a-c* son fórmulas.
3. Una definición, semántica o sintáctica, del *significado* de las expresiones propias de *L* (constantes lógicas).

Una vez definida la gramática, hemos de interpretar las fórmulas del lenguaje *L*, proporcionarles un significado, el cual podemos entender como significado de las expresiones lógicas, pues lo que no es una constante lógica no es sino un lugar convenientemente señalado para enunciados. En este sentido hay dos propuestas principales: la semántica y la

sintáctica. Quienes defienden que el significado principal o único de las constantes lógicas es uno semántico, entienden la lógica como una teoría de las condiciones de verdad de la composición de enunciados. Quienes defienden que la lógica es antes que nada un cálculo, afirman que el significado de las expresiones lógicas consiste en sus condiciones de uso: explicamos el significado de un enunciado cuando establecemos la condiciones en las que puede ser afirmado. De modo que, en *L*, el significado de los operadores lógicos se presenta como derivado de las condiciones de afirmación de las fórmulas que los contienen.

La definición semántica asocia cada operador con una función de una tabla de verdad y reduce la verdad a satisfacibilidad. La definición sintáctica asocia cada uno de ellos con un par de reglas para su introducción y eliminación en el cálculo.

En el enfoque semántico se determinan todas las interpretaciones posibles, partiendo del supuesto de la bivalencia, para los elementos atómicos y se definen las constantes lógicas como funciones de verdad, que toman como argumentos valores de verdad y alcanzan como valores valores de verdad, quedando clasificadas todas las fórmulas del lenguaje *L*, por una parte, en dos clases disyuntas: fórmulas válidas y fórmulas inválidas, y, por otra parte, en otras dos clases también disyuntas: satisfacibles e insatisfacibles. Es decir, la definición semántica de las constantes lógicas nos dice, para cada fórmula de *L*, si es una verdad lógica (tautología, fórmula válida), una falsedad lógica (contradicción, fórmula insatisfacible) o es una fórmula inválida pero no insatisfacible.

satisfacibles		insatisfacibles
$\neg (p \wedge \neg p)$	p	$p \wedge \neg p$
...	...	...
válidas	inválidas	

Una fórmula como *p* es una fórmula satisfacible, pero no válida, o, lo que es lo mismo, es una fórmula inválida, pero no insatisfacible.

Una vez definido el significado de las expresiones de *L*, se pueden dar también reglas de cálculo (de transformación o de derivación), pero éstas no aportan nada al significado de las expresiones de *L*; más bien dichas reglas han de respetar el significado que *ya* tienen los operadores, limitándose a asegurar la conservación de la verdad, asegurando que si las fórmulas sobre las cuales se aplica una regla reciben una interpretación bajo la cual resultan verdaderas, entonces la fórmula que la regla nos per-

mite obtener también resulta verdadera bajo esa misma interpretación. La relación de consecuencia lógica en *L* tiene así un contenido semántico y siempre se puede interpretar como un condicional válido, una relación de implicación.

Decir que $\neg p \rightarrow (p \rightarrow q)$ es una verdad lógica o tautología es decir que, sean cuales sean los valores de verdad de *p* y *q*, la fórmula es verdadera, el condicional que es signo lógico principal de la fórmula es una implicación, por lo que podríamos transformar esa verdad lógica en un modelo de deducción correcta, una regla deductiva:

$$\frac{\neg p}{p \rightarrow q}$$

Podemos representar todas las funciones diádicas (16) más la función monádica de la negación, mediante una definición semántica del subconjunto: $\neg$, $\wedge$, $\vee$ y $\rightarrow$:

1) Una fórmula $\neg\alpha$ es verdadera si y sólo si α es falsa.
2) Una fórmula $\alpha \wedge \beta$ es verdadera si y sólo si α es verdadera y β es verdadera.
3) Una fórmula $\alpha \vee \beta$ es verdadera si y sólo si α es verdadera o β es verdadera.
4) Una fórmula $\alpha \rightarrow \beta$ es verdadera si y sólo si α es falsa o β es verdadera.

Los conceptos centrales de la definición semántica son los de verdad, validez, tautología, satisfacibilidad, modelo e interpretación. Los conceptos sintácticos básicos, en cambio, son los de derivación, regla deductiva y prueba.

Las constantes ($\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$) reciben su significado de las reglas básicas que regulan su introducción y eliminación en el cálculo. No hay que buscar más significado que el que queda fijado en sus reglas de uso.

Introducción de operadores	Eliminación de operadores
$\dfrac{\Gamma, \alpha \vdash \beta \quad \Gamma, \alpha \vdash \neg\beta}{\Gamma \vdash \neg\alpha}$	$\dfrac{\Gamma, \neg\alpha \vdash \beta \quad \Gamma, \neg\alpha \vdash \neg\beta}{\Gamma \vdash \alpha}$

$$\frac{\begin{array}{l}\Gamma \vdash \alpha \\ \Gamma \vdash \beta\end{array}}{\Gamma \vdash \alpha \wedge \beta} \qquad \frac{\Gamma \vdash \alpha \wedge \beta}{\Gamma \vdash \alpha} \qquad \frac{\Gamma \vdash \alpha \wedge \beta}{\Gamma \vdash \beta}$$

$$\frac{\Gamma \vdash \alpha}{\Gamma \vdash \alpha \vee \beta} \qquad \frac{\Gamma \vdash \beta}{\Gamma \vdash \alpha \vee \beta} \qquad \frac{\begin{array}{l}\Gamma \vdash \alpha \vee \beta \\ \Gamma, \alpha \vdash \gamma \\ \Gamma, \beta \vdash \gamma\end{array}}{\Gamma \vdash \gamma}$$

$$\frac{\Gamma, \alpha \vdash \beta}{\Gamma \vdash \alpha \to \beta} \qquad \frac{\begin{array}{l}\Gamma \vdash \alpha \to \beta \\ \Gamma \vdash \alpha\end{array}}{\Gamma \vdash \beta}$$

Así, por ejemplo, la negación significa que si de un conjunto de fórmulas Γ (que puede ser vacío) unido a una fórmula α se deriva tanto una fórmula β como su negación $\neg\beta$, podemos afirmar que del conjunto de fórmulas Γ se deriva la fórmula $\neg\alpha$; y si del conjunto Γ unido a $\neg\alpha$ se deriva tanto β como $\neg\beta$, podemos afirmar que del conjunto Γ se deriva α.

Ahora podemos preguntarnos por la relación entre la definición sintáctica y la semántica. ¿Podemos hacer, por ejemplo, una lectura semántica de cada regla deductiva?, ¿es la relación de consecuencia semántica más básica que la sintáctica o al revés?, ¿son extensionalmente equivalentes?, ¿consiste el significado de una conectiva lógica sólo en su tabla de verdad o sólo en el par de reglas que determinan su uso?

Tomemos, por ejemplo, el par de reglas que regulan el uso de la negación:

$$\frac{\begin{array}{l}\Gamma, \alpha \vdash \beta \\ \Gamma, \alpha \vdash \neg\beta\end{array}}{\Gamma \vdash \neg\alpha} \qquad \frac{\begin{array}{l}\Gamma, \neg\alpha \vdash \beta \\ \Gamma, \neg\alpha \vdash \neg\beta\end{array}}{\Gamma \vdash \alpha}$$

Podemos leerlas del siguiente modo: $\neg\alpha$ es una fórmula verdadera, en el supuesto de que las fórmulas del conjunto Γ lo sean, si el supuesto de que α es verdadera, junto a Γ, arroja una contradicción; y α es una fórmula verdadera, en el supuesto de que las fórmulas del conjunto Γ lo sean, si el supuesto de que $\neg\alpha$ es verdadera, junto a Γ, arroja una contradicción.

Tratemos de leer en términos semánticos el resto de las reglas (supuesta siempre la verdad de las fórmulas del conjunto Γ):

Introducción de $\wedge$: $\alpha \wedge \beta$ es verdadera si α es verdadera y β es verdadera.

Eliminación de $\wedge$: α / β es verdadera si $\alpha \wedge \beta$ es verdadera.

Introducción de $\vee$: $\alpha \vee \beta$ es verdadera si α es verdadera o lo es β.

Eliminación de $\vee$: γ es verdadera si $\alpha \vee \beta$ es verdadera y si del supuesto de que α es verdadera *se sigue* que γ también lo es y del supuesto de que β es verdadera, *se sigue* que γ también lo es.

La interpretación de la eliminación de la disyunción es muy discutible, pues no sólo apelamos a condiciones de verdad, sino también a la noción sintáctica de derivabilidad. ¿Cuál es, entonces, la definición más adecuada? y ¿cómo hemos de entender un sistema lógico?, ¿como un sistema que delimita claramente la clase de las consecuencias semánticas que son expresables en su lenguaje o más bien como uno que delimita la clase de las consecuencias sintácticas? Si hubiera algún sistema lógico donde esas dos clases no coincidan ¿diremos que no es un sistema lógico o qué diremos? En primer lugar, sabemos que la lógica proposicional clásica es completa, que cada una de sus consecuencias semánticas es también consecuencia sintáctica y viceversa, de modo que limitándonos por el momento a la lógica proposicional clásica, queremos saber cuál de las dos definiciones es más básica o si ambas se complementan mutuamente, cuál es la lista de las constantes lógicas, por qué es esa y no otra, si el significado que reciben las constantes lógicas proposicionales (semántico o sintáctico) acota algún significado previo o es un significado estipulado para expresiones que no significan absolutamente nada antes de haberlas introducido en el alfabeto de *L*.

Para la pregunta sobre cuáles son los operadores proposicionales y por qué, la definición semántica tiene una respuesta clara: son las funciones de verdad (cuatro monádicas y 16 diádicas), porque definen las condiciones de verdad de cualquier composición de valores de verdad. Desde el punto de vista sintáctico, diríamos que sólo podemos dar una lista de ellas y precisar su uso dentro del sistema lógico atendiendo a las constantes lingüísticas cuyo uso va ligado a condiciones de aserción. Quine, por ejemplo, nos dice que seleccionamos como expresiones lógicas aquellas expresiones del lenguaje natural que pueden sustituirse por un

número muy limitado de expresiones, frente a las no lógicas que admiten un gran número de alternativas.

La explicación de la relación de consecuencia lógica en términos de afirmabilidad se sostiene en dos supuestos: 1) hay una clase de enunciados lógicamente verdaderos, cuya validez depende únicamente de una forma lógica que exhiben, es decir, del significado de los operadores lógicos que en ellos intervienen; en cuanto a los argumentos, su validez, si la tienen, descansa también únicamente en el significado de los operadores lógicos, y 2) las deducciones básicas (reglas de introducción y eliminación de los operadores) dan el significado de los operadores.

Ahora bien, si la lista no queda determinada por las reglas, sino que más bien las reglas vienen después de haber seleccionado las conectivas y si el significado de las constantes proposicionales se puede reducir al uso que para ellas fija el par de reglas para su introducción y su eliminación, ¿podemos añadir nuevas conectivas a la lógica proposicional (y a un sistema lógico en general) con la única condición de introducir su significado mediante un nuevo par de reglas?

A. N. Prior ideó un nuevo operador (tonk) para mostrar que su introducción, mediante un par de reglas, generaba inconsistencia en el sistema. Ni la definición semántica ni la sintáctica dan el significado completo de las conectivas, o dicho de otro modo, adoptar un par de reglas como definición de una conectiva no va unido a la idea de que ese par de reglas no ha de cumplir ninguna condición semántica. Reconocemos *intuitivamente* que las reglas básicas son deducciones *válidas*. La definición sintáctica se apoya también en nociones semánticas como la validez, y no en el sentido de "vale porque es útil" ni en el de "vale porque es una de las jugadas de nuestro juego lingüístico en general", sino en el sentido de *validez lógica*, como consecuencia *necesaria*.

El conector tonk destruye la capacidad que todo sistema lógico ha de tener para fijar el conjunto de sus consecuencias lógicas. Ninguna regla de eliminación de un operador ha de permitir que obtengamos ninguna fórmula que no contenga el nuevo operador y que no tuviéramos ya o que pudiéramos obtener antes de la introducción de dicho operador. Podemos diseñar un cálculo S_1 que sea una *extensión lógica* de otro cálculo S, ampliando su alfabeto y presentado el par de reglas para el uso de las nuevas expresiones lógicas introducidas, pero el uso de los nuevos operadores no puede modificar las consecuencias de S, sino únicamente ampliar esa clase con nuevas consecuencias que conserven la consistencia en el sistema S_1. En el supuesto de que aceptemos que los significados son o pueden ser convencionales, desde luego no pueden darse arbitrariamente.

Si las reglas básicas no se pueden entender como definiciones completas del significado de los operadores, sino como una acotación y precisión del significado con el que son usadas sus contrapartidas lingüísticas, ¿debemos concluir que el significado básico de una conectiva viene dado por las condiciones de verdad fijadas en su tabla de verdad correspondiente? Tampoco. Hemos asociado una función de verdad determinada, por ejemplo F_8 con $\wedge$, porque hemos *decidido* (tras una discusión sobre formalización) que recoge adecuadamente la parte del significado de "*y*" que importa para la verdad. Hemos representado F_8 mediante $\wedge$ y hemos asociado $\wedge$ con "*y*" después de examinar las condiciones de verdad de los enunciados compuestos mediante "*y*". Las llamadas definiciones de las conectivas lógicas, tanto la semántica como la sintáctica, no son sino *caracterizaciones* del significado formal de las conectivas lingüísticas, con vistas a una explicación de la relación de consecuencia debida a la forma en que componemos algunos de nuestros enunciados y no al significado de los enunciados componentes. Ninguna de las dos "definiciones" son definiciones genuinas, no crean un significado desde la nada, sino que únicamente precisan nociones previas intuitivas más o menos vagas. La construcción de un sistema lógico parte de ciertas intuiciones sobre la validez de algunos de nuestros argumentos, la de aquellos que parecen valer únicamente por la forma que tienen. Por supuesto, se producen desajustes entre el significado intuitivo y el que se recoge y precisa en una lógica. La discusión sobre la formalización parece que siempre será una cuestión abierta.

5. RELACIÓN ENTRE LOS OPERADORES LÓGICOS Y LOS LINGÜÍSTICOS

Examinemos los significados de las conectivas lógicas en relación con los significados de las conectivas lingüísticas.

5.1. Negación

¿Usamos alguna expresión en castellano tal que aplicada a lo verdadero produce lo falso y aplicada a lo falso produce lo verdadero? Parece que nuestra negación "no" se comporta, al menos algunas veces, así.

Dado un enunciado como "Juan estudia mucho", su negación en castellano es "Juan no estudia mucho" (la negación de ese enunciado no sería "Juan estudia poco", por ejemplo). Pues bien, la discusión ahora se reduce a la cuestión de saber si ese enunciado negado significa, en cas-

tellano, lo mismo que "No es verdad que Juan estudia mucho" y lo mismo que "Es falso que Juan estudia mucho". Parece que sí, de modo que este es un uso del "no" que se adecúa a las condiciones de verdad señaladas para ¬: la negación de un enunciado verdadero da lugar a un enunciado falso y la negación de un enunciado falso da lugar a un enunciado verdadero.

Ahora pensemos la negación siguiente: "El monstruo del lago Ness no es un pez". ¿Equivale al enunciado "No es verdad que el monstruo del lago Ness es un pez" o al enunciado "Es falso que el monstruo del lago Ness es un pez"?, ¿son estos dos últimos equivalentes? Ya no estamos tan seguros. Si no hay ningún monstruo en el lago Ness ¿podemos afirmar o negar con verdad algo de "él"?

5.2. Conjunción

El enunciado "Juan y María son navarros" podemos reconstruirlo como "Juan es navarro y María es navarra", cuyas condiciones de verdad son las de $\wedge$. Pero en un enunciado como "Juan y María son pareja" la conjunción no conecta dos enunciados, sino dos nombres propios, no es una función de verdad de los valores de otros enunciados, pues ese es un enunciado atómico. Este uso de "*y*" no se corresponde con el uso de $\wedge$. ¿Qué decir del enunciado "Juan y María se casaron y tuvieron un hijo"?, ¿es la segunda ocurrencia de "*y*" veritativo-funcional?, ¿podemos reconstruirlo como "(Juan y María se casaron) y (Juan y María tuvieron un hijo)"? Parece que, si hacemos esto, perdemos la indicación temporal: primero se casaron y después tuvieron un hijo. Sin embargo aunque puede ser que con la afirmación de ese enunciado se sugiera una sucesión temporal, propiamente no se dice que las cosas ocurrieron en ese orden. En cualquier caso, esa parte del significado queda fuera del análisis veritativo-funcional.

5.3. Disyunción

Algunos de nuestros usos de la disyunción "*o*" no coinciden con los usos definidos para $\vee$. Por ejemplo: "Juan tiene 25 o 26 años". Parece que no aceptaríamos como verdadero que tiene 25 años y también 26. Al decir que tiene 25 o 26 queremos afirmar que tiene una de las dos edades, pero no las dos a la vez. La "*o*" en este caso parece corresponderse más bien con la función de verdad F_{10} y no con F_2. Su negación sería "Juan no tiene ni 25 ni 26 años", que es la negación de F_{10}.

Hacemos afirmaciones como "Pedro estudia Arte o Medicina", cuando no sabemos cuál de las dos carreras estudia, pero creemos que no estudia las dos. Cuando sabemos que estudia las dos, no emitimos ese enunciado, sino uno como: "Pedro estudia Arte y medicina". Con el primer enunciado queremos decir que estudia *al menos una* de esas dos carreras, sin excluir la posibilidad de que estudie las dos, lo cual parece coincidir con nuestra definición de $\vee$.

A veces componemos dos enunciados utilizando el marcador de disyunción dos veces, como si quisiéramos afirmar que una de las dos alternativas es verdadera, pero no las dos, por ejemplo: "O te pones el traje o no entras", sin embargo estos son casos de nuestra constante $\vee$: $(p \vee \neg q)$. Expresiones con la forma "o ... o no ..." casi siempre significan una disyunción inclusiva. Podemos expresar ese pensamiento diciendo que para entrar es necesario ponerse el traje: $q \rightarrow p$, que si uno no se lo pone, no entra: $\neg p \rightarrow \neg$q, con lo cual parece que las interdefiniciones de los operadores lógicos se adecúan también a ciertas transformaciones permitidas en el lenguaje natural.

5.4. Condicional

¿En qué condiciones estamos dispuestos a afirmar un condicional como verdadero? Cuando consideramos que es falso que dándose el antecedente no se dé también el consecuente. Es decir, parece que estamos dispuestos a afirmar un enunciado con la forma $p \rightarrow q$, siempre y sólo cuando estamos dispuestos a afirmar $\neg(p \wedge \neg q)$.

La función $\rightarrow$ parece recoger el significado con el que usamos expresiones como "si ... entonces", "sólo si", etc., sin embargo las relaciones entre el "si ..., entonces" y "$\rightarrow$" no están nada claras. En castellano utilizamos "si ..., entonces" para establecer algún tipo de relación de fundamentación entre el antecedente y el consecuente o para expresar un deseo, un compromiso, una promesa, etc., a veces sólo queremos expresar la falsedad del antecedente, o una posibilidad contrafáctica.

En el caso de las promesas, si el antecedente no se cumple, la promesa se cancela, uno puede hacer lo prometido en el consecuente del condicional o no, y no diremos que ha mentido o que ha incumplido su promesa. Tampoco consideramos equivalentes enunciados como "Si vienes a buscarme, te invito al cine" y "Vienes a buscarme sólo si te invito al cine".

A veces sólo queremos afirmar que el antecedente es falso. Por ejemplo "Si dos y dos fueran igual a uno, Russell sería Dios", con lo cual sólo

queremos decir que no es verdad que dos y dos son uno. Otras veces queremos expresar una previsión en una situación contrafáctica: “Si La Luna no existiera, el planeta Tierra no tendría ningún satélite”; o simplemente una previsión en una situación posible: “Si la especie humana se extingue, no por ello se extinguirán también otras especies”. Considerando la situación contrafáctica en la que el antecedente es verdadero, depende del valor de verdad que asociemos con el consecuente el que aceptemos el enunciado complejo como verdadero o como falso. Por ejemplo, aún siendo falso que el Partido Popular haya ganado las elecciones generales de 2004, difícilmente aceptaríamos como verdadero el enunciado “Si el Partido Popular hubiera ganado las elecciones generales de 2004, habría ordenado la retirada inmediata de las tropas españolas de Irak”.

Si no estamos interesados en establecer una relación entre el significado del antecedente y el del consecuente, normalmente no afirmamos un condicional: cuando conocemos la verdad del consecuente, no afirmamos $(p \rightarrow q)$, sino simplemente q, o bien $((p \vee \neg p) \rightarrow q)$; si conocemos la falsedad del consecuente, afirmamos directamente su negación: $\neg q$; cuando conocemos la verdad de antecedente y consecuente, afirmamos su conjunción, etc.

Pero cuando hay relación de significado entre el antecedente y el consecuente, la cosa cambia. Al conocer la verdad de p, afirmamos $(p \rightarrow q)$ para decir que q “se sigue” de p, que q es condición necesaria para la verdad de p; si conocemos la falsedad del antecedente y la del consecuente, afirmamos $(p \rightarrow q)$ cuando queremos afirmar $\neg p$, apoyándonos en que nuestro interlocutor también reconoce que q es falso, o bien cuando concebimos una situación contrafáctica en la que tanto p como q serían verdaderos; cuando no conocemos ni p ni q, afirmamos $(p \rightarrow q)$ para indicar que q sería verdadero si p lo es.

En lenguaje natural generalmente utilizamos el condicional cuando no conocemos los valores de verdad de los dos componentes o cuando queremos expresar alguna relación necesaria entre el antecedente y el consecuente. Al afirmar, por ejemplo, que si se hierve el agua, entonces se evapora, estamos afirmando una relación entre el significado del antecedente y el del consecuente y no meramente una composición veritativo-funcional. Con el enunciado “Si calientas el agua, se evapora”, queremos decir que el consecuente es verdadero cuando lo es el antecedente *y por ello*. En estos casos, no basta que antecedente y consecuente sean verdaderos para que el enunciado condicional sea verdadero, sino que se requiere que el consecuente sea verdadero *por el hecho de* serlo el antecedente.

Cuando sabemos que antecedente y consecuente son ambos verdaderos, no decimos, por ejemplo, "Si el hielo es menos denso que el agua, entonces flota en el agua", sino más bien "*Porque* el hielo es menos denso que el agua, flota en el agua". Tampoco decimos "Si el barro es un metal, es maleable", cuando sabemos que el antecedente es falso y el consecuente verdadero, sino "*Aunque* el barro no es un metal, es maleable". El otro caso en el que el operador → resulta verdadero, cuando antecedente y consecuente son falsos parece que recoge nuestros usos del subjuntivo (contrafácticos): "si el hierro fuera menos denso que el agua, flotaría en el agua".

Que el condicional es muy frecuentemente algo más que una función de verdad lo pone de manifiesto Frege[19] examinando el ejemplo que ya hemos dado: "Porque el hielo es menos denso que el agua, flota en el agua". Este enunciado no expresa dos, sino tres proposiciones:

1) El hielo es menos denso que el agua.
2) Todo lo que es menos denso que el agua, flota en el agua.
3) El hielo flota en el agua.

El antecedente del condicional expresa el primero y parte del segundo. Por eso, no podemos decir con toda generalidad, que podemos sustituir un antecedente (o un consecuente) en un condicional por otro enunciado que tenga el mismo valor de verdad, conservando el valor de verdad del condicional, pues el cambio de pensamiento que se produciría, puede afectar al valor de verdad del condicional.

Las condiciones de verdad de "si ... entonces" no siempre se reducen a las condiciones de verdad fijadas para "→", no siempre el valor de verdad de los enunciados de tipo condicional depende sólo del valor de verdad de sus oraciones componentes, sino que muchas veces dependen también de la verdad de otros enunciados.

Strawson[20] nos da un ejemplo de uso del condicional en lenguaje natural que no concuerda con nuestra definición para la constante →: "Si estaba perturbado, no se le notó" ($p \rightarrow \neg q$). Este enunciado no expresa ninguna relación de fundamentación entre el antecedente y el consecuente y sus condiciones de verdad tampoco coinciden con las de →, pues resulta falso cuando el consecuente es falso, tenga el valor que tenga el antecedente. No tomaríamos como equivalente el enunciado

[19] FREGE, G. (1984a): 81,2.
[20] Cfr. STRAWSON (1969).

"Si se le notó perturbado, no lo estaba" ($q \rightarrow \neg p$), aunque sí creemos que también podríamos decir "No es verdad que estaba perturbado y se le notó" ($\neg(p \wedge q)$).

¿Que hacemos con estos desajustes entre los usos de las conectivas lingüísticas y los significados con los que caracterizamos los usos de las conectivas lógicas, ya sea en términos de condiciones de afirmación o en términos de condiciones de verdad? Podemos dar tres tipos de respuesta a esta pregunta:

1) Los usos no recogidos en la lógica clásica podemos tratar de recogerlos en otros sistemas lógicos no clásicos o en extensiones de la lógica clásica.
2) Todos los usos de las conectivas lingüísticas no pueden ser adecuadamente recogidos en ningún sistema lógico ni es posible una variedad de sistemas lógicos tal que cada uso natural esté representado en alguno de ellos.
3) Los usos de las conectivas enunciativas que importan para la verdad están adecuadamente representados como funciones de verdad; otros usos no son veritativo-funcionales, sino condiciones de relevancia en situaciones concretas, pero el significado de las conectivas lógicas nos da el núcleo importante de las condiciones de la validez de los argumentos.

III
SEMÁNTICA Y ONTOLOGÍA

1. CUANTIFICADORES

El estudio de la cuantificación constituye uno de los temas centrales de la filosofía de la lógica, dado que está estrechamente ligado a nociones filosóficas importantes como las de identidad, referencia, existencia, verdad, distinción entre concepto y objeto, etc.

1.1. Sintaxis y semántica clásicas para la cuantificación

Podemos presentar la lógica clásica de primer orden como una extensión de la lógica proposicional ampliando su lenguaje con nombres para predicados, nombres para objetos, letras para señalar lugares de argumentos y las dos nuevas expresiones lógicas: el cuantificador universal y el particular, así como las reglas gramaticales que determinan el conjunto de las fórmulas. Dado este lenguaje ampliado *L*, veamos qué puede significar verdadero-en-*L* y deducible-en-*L*.

Hemos examinado ya las condiciones de verdad para aquellas fórmulas cuyo signo lógico principal es una de las conectivas proposicionales, diciendo que el valor de verdad de las proposiciones compuestas estaba en función de los valores de verdad de las proposiciones componentes.

Para establecer las condiciones de verdad de fórmulas atómicas analizadas, como Pa, no podemos recurrir a los valores de verdad de sus elementos componentes, pues estos no son ya fórmulas. Una fórmula como Pa está compuesta por el nombre de un predicado (constante predicativa) y un nombre propio (constante individual), la fórmula Px está formada por el nombre de un predicado y una letra de lugar vacío o lugar de argumento (variable individual). Nuestro objetivo ahora es explicar, con generalidad, las condiciones de verdad de las fórmulas cerradas mediante cuantificación existencial o universal.

Para interpretar una fórmula en lógica clásica de primer orden hemos de seguir los siguientes pasos:

1.º Determinar una estructura: un universo de objetos y un sistema de propiedades para esos objetos.

2.º Presentar una secuencia objetiva (S_I): una lista arbitraria de objetos del universo del discurso, iguales o distintos, finita o infinita.

3.º Asignar un valor de verdad a cada constante proposicional.

4.º Asignar a cada constante individual un objeto del universo del discurso.

5.º Asignar a cada constante predicativa de grado n una propiedad de grado n definida en la estructura.

6.º Asignar a cada variable individual libre de índice n el enésimo elemento de la secuencia objetiva S_I.

Decir que los predicados son *verdaderos de objetos* es tanto como decir que los predicados son funciones que aplican una secuencia de objetos en el conjunto $\{V, F\}$, como hemos visto en el capítulo anterior. Ahora podemos extender a la lógica de primer orden la reducción tarskiana de la noción de verdad a la de satisfacción, mediante las siguientes definiciones parciales:

Sean α y β fórmulas cualesquiera.
Sea S_I una secuencia de objetos.
Sea I una interpretación.

(1) *a)* S_I satisface α en I ssi $I(\alpha) = V$
b) S_I no satisface α en I ssi $I(\alpha) = F$

(2) *a)* S_I satisface α en I ssi $I(a_i) = O_m$ y $I(P_j) = F_n$ y $O_m \in F_n$
b) S_I no satisface α en I ssi $I(a_i) = O_m$ y $I(P_j) = F_n$ y $O_m \notin F_n$

(3) *a)* S_I satisface α en I ssi $I(x_i) = \mathrm{s}_i$ y $I(P_j) = F_n$ y $\mathrm{s}_i \in F_n$
b) S_I no satisface α en I ssi $I(x_i) = \mathrm{s}_i$ y $I(P_j) = F_n$ y $\mathrm{s}_i \notin F_n$

(4) *a)* S_I satisface ¬α en I ssi S_I no satisface α en I
b) S_I no satisface ¬α en I ssi S_I satisface α en I

(5) *a)* S_I satisface $(\alpha \wedge \beta)$ en I ssi S_I satisface α en I y S_I satisface β en I
b) S_I no satisface $(\alpha \wedge \beta)$ en I ssi S_I no satisface α en I o S_I no satisface β en I

(6) *a)* S_I satisface $(\alpha \vee \beta)$ en I ssi S_I satisface α en I o S_I satisface β en I

b) S_I no satisface $(\alpha \vee \beta)$ en I ssi S_I no satisface α en I y S_I no satisface β en I

(7) *a)* S_I satisface $(\alpha \rightarrow \beta)$ en I ssi S_I no satisface α en I o S_I satisface β en I

b) S_I no satisface $(\alpha \rightarrow \beta)$ en I ssi S_I satisface α en I y S_I no satisface β en I

(8) *a)* S_I satisface $\forall x_i\ \alpha$ en I ssi S_I y toda secuencia S de objetos que difiera sólo en el iésimo elemento (s_i) satisface α en I

b) S_I no satisface $\forall x_i\ \alpha$ en I ssi S_I o alguna secuencia S de objetos que difiera sólo en el iésimo elemento (s_i) no satisface α en I

(9) *a)* S_I satisface $\exists x_i\ \alpha$ en I ssi S_I o alguna secuencia S satisface α en I

b) S_I no satisface $\exists x_i\ \alpha$ en I ssi S_I y toda secuencia S de objetos que difiera sólo en el iésimo elemento (s_i) no satisface α en I

(1) define *satisfacción* para fórmulas atómicas proposicionales. Si y sólo si la asignación de una fórmula, por ejemplo: p, en la interpretación que estamos considerando (I), es lo verdadero, p es satisfacible (en I).

(2) define *satisfacción* para fórmulas de tipo Pa. Estas fórmulas son satisfacibles si y sólo si el objeto que la interpretación I asigna al nombre propio "*a*" pertenece a la extensión del predicado que I asigna a "*P*". Su aplicación extendida a predicados no monádicos es sencilla. Por ejemplo, diremos que Pab es satisfacible si y sólo si $I(a) = O_m$, $I(b) = O_n$, $I(P) = F_n$ y $<O_{m,}\ O_n> \in F_n$.

(3) define *satisfacción* para fórmulas abiertas, es decir, fórmulas que contienen variables individuales que no están ligadas por ningún cuantificador, por ejemplo: Px_3. Bajo una interpretación I, Px_3 es una fórmula satisfacible si y sólo si el tercer elemento de la secuencia arbitraria de objetos S_I (s_3) es uno de los elementos de la extensión del predicado asignado a P en I.

(4) - (7) definen *satisfacción* para fórmulas cuyo signo lógico principal es la negación, la conjunción, la disyunción o el condicional, mediante las interdefiniciones que ya conocemos. Por ejemplo, una secuencia arbitraria de objetos del universo de discurso de la interpretación I satisface $\neg\alpha$ si y sólo si esa misma secuencia de objetos no satisface α en I. Si tiene como signo lógico principal otra negación, aplicaremos sobre ella la segunda parte de la definición (4), si es de otro tipo, tendremos que mirar en la definición correspondiente a dicho tipo de fórmula. Es decir,

las definiciones (4) - (7) nos llevan a examinar, a la luz de las otras definiciones, la satisfacción para las fórmulas componentes.

(8) y (9) definen *satisfacción* para las fórmulas cuantificadas universal o existencialmente. Por ejemplo, en los casos más sencillos, para examinar la satisfacción de $\forall x_1\ Px_1$ y de $\exists x_1\ Px_1$, debemos examinar la fórmula Px_1, que es una fórmula abierta. Una determinada secuencia de objetos (de I) satisface Px_1 (en I) si y sólo si el primer elemento de la secuencia pertenece a la extensión del predicado asignado a P en I. Esto basta para que la fórmula $\exists x_1\ Px_1$ sea satisfacible en I, pero para que lo sea $\forall x_1\ Px_1$ debemos considerar todas las secuencias de objetos que difieran en su primer elemento. Es decir, no basta que el primer elemento de la secuencia arbitraria de objetos pertenezca a la extensión del predicado, sino que es necesario que todos los objetos del universo de discurso de I tengan la propiedad P. Si el primer elemento de la secuencia de partida no satisface Px_1, no concluiremos inmediatamente que la fórmula $\exists x_1\ Px_1$ no es satisfacible, sino que consideraremos también aquellas secuencias que difieran de ella únicamente en su primer elemento, pero *basta* encontrar *una* que satisfaga Px_1 para poder afirmar que $\exists x_1\ Px_1$ es una fórmula satifacible en I.

Con estos elementos, podemos precisar qué significa "es verdadero" para una lógica clásica de primer orden:

> Una fórmula cualquiera α es *verdadera-en-I* si y sólo si toda secuencia de objetos S_I del universo del discurso satisface α en I.

Paralelamente, podemos decir que una fórmula cualquiera α es *falsa-en-I* si y sólo si ninguna secuencia S_I satisface α en I.

La noción de satisfacción queda caracterizada, por tanto, del siguiente modo:

α es satisfacible:	Existe una interpretación I tal que S_I satisface α en I.
α no es satisfacible:	No existe una interpretación I tal que S_I satisface α en I.
	Para toda interpretación I, S_I no satisface α en I.
α es válida:	Para toda I y toda S_I (S_I satisface α en I).
α no es válida:	Existe una interpretación I tal que ninguna secuencia S_I satisface α en I.
α implica β:	Para toda I (α es falsa en I o β es verdadera en I).

Veamos un ejemplo.

Queremos saber si la fórmula $\forall x_1 \exists x_2 (Px_1 \rightarrow Qx_2)$ es satisfacible.

De acuerdo con las definiciones que hemos dado, $\forall x_1 \exists x_2 (Px_1 \rightarrow Qx_2)$ es satisfacible si y sólo si existe una interpretación I tal que la fórmula es satisfecha por una secuencia arbitraria de objetos de I (S_I). Lo que hemos de hacer entonces, en primer lugar, es presentar una interpretación I para esa fórmula. Ahora bien, S_I satisface una fórmula cuyo signo lógico principal es un cuantificador universal, que va seguido de la variable x_1, si y sólo si toda secuencia de I que difiera en su primer elemento satisface la fórmula abierta que sigue al cuantificador. Examinemos todos los pasos.

INTERPRETACIÓN I:

1) Estructura:

   U.D.: {Kripke, Quine, Russell}

   Predicados: F_1: {Kripke, Quine, Russell}
   F_2: {Kripke, Quine}
   F_3: {Kripke, Russell}
   F_4: {Quine, Russell}
   F_5: {Kripke}
   F_6: {Quine}
   F_7: {Russell}
   F_8: {∅}

2) Secuencia objetiva S_I = (Kripke, Russell, Kripke).

3) (No es aplicable, pues no hay ninguna constante proposicional en esta fórmula).

4) (No es aplicable, ya que esta fórmula tampoco contiene ninguna constante individual).

5) $I(P) = F_3$
   $I(Q) = F_4$

6) (No es aplicable, pues la fórmula no contiene variables libres).

La secuencia de objetos S_I satisface $\forall x_1 \exists x_2 (Px_1 \rightarrow Qx_2)$ *en esta interpretación I* si y sólo si S_I y toda otra secuencia de objetos que difiera de S_I en su primer elemento satisface $\exists x_2 (Px_1 \rightarrow Qx_2)$ en I. Las secuencias que hemos de considerar entonces son:

S_I = (Kripke, Russell, Kripke)
S_1 = (Russell, Russell, Kripke)
S_2 = (Quine, Russell, Kripke)

Ahora tenemos que comprobar que tanto S_I como S_1 y S_2 satisfacen $\exists x_2 (Px_1 \rightarrow Qx_2)$ en I.

La secuencia S_I satisface $\exists x_2 (Px_1 \rightarrow Qx_2)$ en I si sólo si S_I o cualquier otra secuencia de objetos que difiera de S_I en su segundo elemento satisface $Px_1 \rightarrow Qx_2$ en I.

S_I = (Kripke, Russell, Kripke)
S_I' = (Kripke, Kripke, Kripke)
S_I'' = (Kripke, Quine, Kripke)

La secuencia S_1 satisface $\exists x_2 (Px_1 \rightarrow Qx_2)$ en I si sólo si S_1 o cualquier otra secuencia de objetos que difiera de S_1 en su segundo elemento satisface $Px_1 \rightarrow Qx_2$ en I.

S_1 = (Russell, Russell, Kripke)
S_1' = (Russell, Kripke, Kripke)
S_1'' = (Russell, Quine, Kripke)

La secuencia S_2 satisface $\exists x_2 (Px_1 \rightarrow Qx_2)$ en I si sólo si S_2 o cualquier otra secuencia de objetos que difiera de S_2 en su segundo elemento satisface $Px_1 \rightarrow Qx_2$ en I.

S_2 = (Quine, Russell, Kripke)
S_2' = (Quine, Kripke, Kripke)
S_2'' = (Quine, Quine, Kripke)

Una secuencia de objetos satisface $Px_1 \rightarrow Qx_2$ si y sólo si no satisface Px_1 o satisface Qx_2.

El segundo elemento de S_I es Russell, $I(Q) = F_4$ y Russell $\in F_4$. Esto significa que S_I satisface Qx_2 en I. No necesitamos considerar ni la fórmula Px_1 ni ninguna otra secuencia para poder afirmar que S_I satisface $Px_1 \rightarrow Qx_2$. Por tanto, S_I o S_I' o S_I'' satisface $Px_1 \rightarrow Qx_2$. Por tanto, S_I satisface $\exists x_2 (Px_1 \rightarrow Qx_2)$.

Con S_1 y con S_2 sucede lo mismo que con S_I: su segundo elemento es Russell, que está en la extensión de Q. Por tanto S_1 o S_1' o S_1'' satisface $Px_1 \rightarrow Qx_2$ y S_2 o S_2' o S_2'' satisface $Px_1 \rightarrow Qx_2$. Luego, tanto S_1 como S_2 satisfacen $\exists x_2 (Px_1 \rightarrow Qx_2)$.

Puesto que S_I y S_1 y S_2 satisfacen $\exists x_2 (Px_1 \rightarrow Qx_2)$, S_I satisface $\forall x_1 \exists x_2 (Px_1 \rightarrow Qx_2)$, que es lo que queríamos saber.

En cuanto a la derivabilidad, en la lógica de primer orden tenemos dos nuevas expresiones lógicas, para las cuales disponemos de cuatro nuevas reglas deductivas:

Reglas de introducción

$$\frac{\Gamma \vdash \varphi^{\alpha}}{\Gamma \vdash \forall x\ \varphi^{x/\alpha}} \quad (1)$$

$$\frac{\Gamma \vdash \varphi^{\alpha}}{\Gamma \vdash \exists x\ \varphi^{x/\alpha}}$$

Reglas de eliminación

$$\frac{\Gamma \vdash \forall x\ \varphi^{x}}{\Gamma \vdash \varphi^{\alpha/x}}$$

$$\frac{\Gamma \vdash \exists x\ \varphi^{x} \qquad \Gamma, (\varphi^{\alpha/x}) \vdash \psi}{\Gamma \vdash \psi} \quad (2)$$

(1) α no figura en Γ ni x en φ^{α}

(2) α no figura en Γ ni en ψ ni en $\exists x\ \varphi^{x}$

1.2. Interpretación sustitucional e interpretación objetual de las variables individuales

Se han dado dos interpretaciones de la cuantificación que están estrechamente ligadas a los compromisos ontológicos que uno esté dispuesto a asumir:

1) Interpretación sustitucional: las variables individuales se sustituyen por nombres propios, con el único presupuesto de que los objetos nombrados existen en nuestro universo del discurso, pero sin pronunciarnos acerca de si esos objetos tienen o no realidad, es decir, aceptando en nuestra ontología tanto objetos actuales como meramente posibles, concretos, abstractos, etc.

2) Interpretación objetual: decimos que los predicados son *verdaderos de* objetos. Un enunciado cuantificado es verdadero por la *existencia de objetos* que satisfacen sus predicados.

La segunda interpretación sólo se puede defender desde una concepción absoluta de la verdad: el dominio de nuestro universo del discurso y las secuencias objetivas que podemos elaborar a partir de él no son relativas a mundos posibles. En una teoría relativa de la verdad, en cambio,

nada impide manejar expresiones como "verdadero-en-M_1" (un mundo posible 1) y hacer afirmaciones sobre objetos no existentes en M_0 (el mundo actual o real).

La oposición entre estas dos interpretaciones de la cuantificación, para predicados monádicos, se podría expresar también así:

1) Un *nombre propio* ocupa el lugar vacío de la expresión predicativa y da lugar a un enunciado que es verdadero o falso.

2) Un *objeto* satisface (o no) un enunciado abierto, un predicado.

La sustitución objetual ha sido defendida por Quine, quien no quiere dejar ninguna posibilidad abierta a la cuantificación sobre predicados. Las nociones de referencia, identidad, existencia, objeto, verdad y predicación están íntimamente ligadas entre sí, de modo que la posición filosófica que se defienda en relación con cualquiera de ellas repercute inmediatamente sobre las demás. Quine entiende que "ser es ser el valor de una variable" y, por supuesto, no acepta entidades intensionales, para las cuales no tenemos criterios claros de identificación.

Según Quine, si pudiéramos utilizar con sentido expresiones como "existen propiedades F e individuos x tales que Fx", estaríamos concediendo realidad a los predicados como algún tipo de objetos abstractos, con lo cual habría desaparecido la distinción entre objeto y concepto. Un objeto es la referencia de un nombre propio y sólo los objetos son argumentos candidatos para saturar las funciones, sólo sus expresiones (los nombres propios) son candidatos a ocupar la posición de las variables afectadas por la cuantificación. Los nombres de funciones, en cambio, no designan ninguna entidad y no pueden ocupar la posición de variables. Si aceptáramos que, después de todo, los predicados son algún tipo de objetos intensionales, deberíamos proporcionar sus condiciones de identidad, algo que no podremos hacer, pues los lugares argumentales de la relación de identidad son ocupados siempre por nombres propios. Lo mejor es renunciar a la posibilidad de desarrollar lógicas de segundo orden. El cuantificador existencial se aplica a entidades, pero no hay entidad sin identidad y lo único que podemos identificar son objetos. Por eso no podemos afirmar la existencia de predicados ni de proposiciones.

En cuanto a la relación entre las otras dos nociones, la de referencia y la de verdad, y entre ellas y la cuantificación, hemos de decir que en los lenguajes naturales puede ser que utilicemos expresiones con la intención de hacer referencia a un objeto y que dicho objeto no exista. En ese caso, no son expresiones candidatas para ocupar los lugares argumenta-

les de una función predicativa. El tipo de expresiones que permiten este uso en el que parece que la expresión denota un objeto, pero en realidad no lo hace son las descripciones definidas. El uso de expresiones no referenciales puede hacer fracasar la sustitución de los idénticos *salva veritate*, y el fallo en la sustitución indica un fallo en la referencia y en la cuantificación. Una manera de evitar el uso de esas expresiones es adoptar la teoría russelliana de las descripciones. Expresiones como "el único *F* es *G*" no son del tipo sujeto-predicado, como lo es *Ga*, sino que son afirmaciones sobre los objetos que caen bajo *F* (quizás uno y sólo uno) y los objetos que caen bajo *G*, del tipo "existe un único objeto que es *F* y *ese* objeto también es *G*". Esta expresión sí estaría bien construida, *F* y *G* son predicados monádicos y el enunciado cuantificado puede ser verdadero o falso, ya no es posible el fallo referencial, pues la descripción ha sido eliminada. Continuando con esta estrategia podríamos, siguiendo en esto también a Russell, eliminar del lenguaje formal todos los nombres usados para hacer referencia a objetos, bastaría que transformáramos todas las fórmulas que contengan constantes individuales en fórmulas que sólo contengan variables individuales ligadas por cuantificadores.

En ocasiones se dice que la teoría tarskiana de la verdad hace una interpretación objetual de la cuantificación, que la explicación tarskiana no se basa en la existencia de enunciados atómicos, mientras que los elementos básicos de la teoría fregeana son precisamente los enunciados atómicos y sus dos posibles valores de verdad. Sin embargo la distancia entre lo que dice Tarski y lo que dice Frege es mínima: Frege localiza también el problema de los nombres no referenciales y prohíbe su uso en el lenguaje lógico. De hecho, en el cálculo lógico de primer orden no podemos introducir ninguna descripción como ιxFx ni la fórmula $F\iota xFx$ a menos que podamos contar con la afirmación de que hay un objeto y sólo uno que es *F*.

Las dos propuestas, sustitucional y objetual, se pueden reducir a las afirmaciones siguientes:

1) Al saturar un nombre de predicado "*P*" mediante un nombre propio "*a*", obtenemos un valor de verdad.

2) Un objeto llamado "*a*" satisface o no satisface un predicado llamado "*P*".

Los operadores proposicionales son un tipo especial de predicados: funciones cuyo dominio y codominio es el conjunto {*V*, *F*}. En esto Tarski y Frege coinciden. Pero, en cuanto a la lógica de primer orden, Tarski

explica la verdad de los enunciados, tanto moleculares como atómicos, en términos de satisfacción, mientras que Frege sigue asociando la cuantificación universal con una conjunción de valores de verdad y la existencial con una disyunción de los mismos.

Tarski explica la verdad de los enunciados mediante la satisfacción de los predicados, de modo que parece que el predicado es anterior al enunciado. Frege, en cambio, dice claramente que "encontramos" los predicados *después de* haber analizado *el enunciado*, que sólo en el contexto de la oración tienen las palabras un significado. El enunciado atómico es la unidad lingüística mínima capaz de expresar un significado verdadero o falso; no tiene sentido hablar de predicados verdaderos, y sólo derivadamente tiene sentido decir que un predicado es verdadero de un objeto, porque es una función que aplicada a un objeto obtiene un valor de verdad. El hecho es que hacemos predicaciones sobre objetos, pero lo único que tenemos a nuestra disposición son sus nombres.

Por otra parte, Frege quiere distinguir el predicado "real", que es de primer nivel, del predicado "existe", que es de segundo nivel, un cuantificador lógico. Construye su lenguaje lógico evitando, en primer lugar, la enorme dificultad de la identificación de los llamados objetos reales o actuales, admitiendo, en segundo lugar, la significatividad y el valor de verdad de algunos enunciados sobre entidades ideales, y, por último, estipulando que los nombres propios utilizados tienen referencia. Interpreta la cuantificación sustitucionalmente, pero sin olvidar que los nombres utilizados son referenciales, es decir, Frege también está explicando las condiciones de verdad de los enunciados atómicos en términos de objetos que *caen o no caen bajo* los conceptos que de ellos se predican. La diferencia con Tarski parece más bien una cuestión de estilo. La teoría de Frege no es, pues, una teoría sustitucional genuina.

Quien sí ha defendido una teoría sustitucional de la cuantificación es R. Marcus[21]. Coincidiendo con Frege, afirma que las condiciones de verdad de $\forall x\, Px$ y $\exists x\, Px$ son, respectivamente, las de $(Pa \wedge Pb \wedge \ldots \wedge Pn)$ y $(Pa \vee Pb \vee \ldots \vee Pn)$, pero a diferencia de Frege, no exige nada en cuanto a la referencialidad de los nombres que pueden ocupar los lugares argumentales. En la propuesta fregeana podemos aceptar objetos no reales en nuestro universo de discurso, pero no podemos aceptar un nombre que no nombra nada. La diferencia entre Marcus y Frege no está, por tanto, en el tipo de objetos aceptables, sino en permitir o no el uso de nombres no referenciales.

---

[21] MARCUS, R. (1962): "Interpreting quantification", *Inquiry* 5.

Marcus parte del hecho de que lo que podemos manejar en el lenguaje para hacer afirmaciones verdaderas o falsas no son los objetos mismos, sino expresiones que los suponen, y admite nombres de objetos reales y nombres de objetos sólo posibles, lo cual no significa que nos comprometemos con su realidad. La tentación es confundir existencia con realidad o, dicho de otro modo, confundir el cuantificador existencial con la afirmación de existencia en el mundo real o mundo actual (M_0). ¿Se sigue de la cuantificación que los objetos de los que predicamos algo tienen realidad? Según Quine, atribuir existencia a objetos que no existen en M_0 es un sinsentido y deberíamos manejar un lenguaje lógico que lo evite. Según Marcus, sí tiene sentido hablar sobre objetos que no existen en M_0. De hecho, la afirmación existencial sólo nos compromete con la existencia (en M_0) de entidades lingüísticas, no con la existencia (en M_0) de sus referencias. Marcus no acepta el criterio ontológico de Quine, ser no es ser el valor de una variable.

Quine se plantea en primer lugar qué debemos aceptar como existente, qué compromisos ontológicos estamos dispuestos a asumir y el principio que guía la respuesta a esa pregunta es "ninguna entidad sin identidad". De acuerdo con esto, interpreta la cuantificación como pudiendo variar las *entidades* admitidas como existentes. De aquí deriva su principio ontológico: ser es ser el valor de una variable, es decir, lo deriva de la lógica aceptada, pero previamente ha determinado qué partes del enunciado acepta como cuantificables y cuáles no. Las tesis de Quine las podemos resumir en lo siguiente: ninguna cuantificación sin entidad, ninguna entidad sin identidad, ninguna identidad sin indiscernibilidad. Según Marcus, el hecho es que podemos hacer afirmaciones como "Existen propiedades *F* que se dicen con verdad de Sócrates" y una prohibición de este modo de hablar no puede venir de la lógica misma. El camino adecuado no es el de decidir primero qué hay y, de acuerdo con ello, interpretar nuestros enunciados existenciales, sino aclarar qué es la cuantificación y, de acuerdo con ello, cuáles son los compromisos ontológicos de nuestras afirmaciones existenciales. La cuestión es que un enunciado cuantificado existencialmente no dice que son reales los objetos de los que predica algo.

La objeción de Quine a la teoría sustitucional se basa en la idea de que podemos tener más nombres que objetos o más objetos que nombres. En un universo de discurso donde contamos con un número infinito de objetos y un número limitado de nombres, las equivalencias

$$\forall x\, Px \text{ si y sólo si } (Pa \wedge Pb \wedge \ldots \wedge Pn)$$

y

$$\exists x\, Px \text{ si y sólo si } (Pa \vee Pb \vee \ldots \vee Pn)$$

ya no se sostienen. Puede ser verdadero que hay un objeto con la propiedad *P* y ser falso ($Pa \lor Pb \lor ... \lor Pn$) y puede ser verdadero ($Pa \land Pb \land ... \land Pn$) y ser falso que todo objeto tenga la propiedad *P*.

Pero estamos de acuerdo con Kripke cuando nos dice que, definido un lenguaje *L* y una semántica adecuada para *L*, no necesitamos tomar en consideración objetos anónimos, podemos estipular que todos los nombres utilizados en *L* tienen referencia, e incluso podemos aceptar en *L* nombres sin referencia y definir para ellos una relación de pseudodenotación, distinguiéndolos de los términos que sí denotan objetos. Este es un compromiso mínimo que no comporta la afirmación de realidad de las entidades nombradas y que nos permite tratar con contextos tan importantes como el matemático o los discursos intensionales, como el indirecto o el modal. La confusión entre existencia y realidad es, según Frege, una de las más groseras:

> Si yo pretendiera decir que el número dos es actual o que es efectivo o real, esto sería falso y totalmente distinto de lo que quiero decir con el enunciado «hay raíces cuadradas de cuatro». La confusión que se da aquí es casi la más grosera posible; pues no ocurre entre conceptos del mismo orden, sino que se mezcla un concepto de primer orden con uno de segundo[22].

La negativa de Quine a cuantificar sobre propiedades tiene una versión ontológica y una lingüística: cuantificar sobre propiedades nos llevaría a confundir, según Quine, objetos con conceptos o relaciones y nombres propios con nombres de funciones. Pero esto es sencillamente falso. Si afirmamos que existen propiedades *P* que son verdaderas de Sócrates ($\exists P\ Pa$), "*P*" sigue cumpliendo la función de predicado, sigue representando una propiedad de un objeto. No es la posibilidad de la cuantificación lo que nos permite distinguir esos dos tipos de expresiones (nombre de predicado y nombre de objeto) y sus contrapartidas ontológicas (predicado y objeto), la cuantificación sobre propiedades no las convierte en entidades similares a los objetos.

En filosofía se distingue el que la cosa es (existencia) de lo que la cosa es. Esta distinción viene de la discusión sobre la *existencia* de Dios. Kant critica la prueba ontológica de la existencia de Dios defendiendo que la existencia no es un predicado real: lo real no tiene más que lo posible, añadir a la noción de Dios el "es" de existencia o decir "Dios existe" es no añadir nada a la noción de Dios. Para probar la existencia de algo, lo que hemos de hacer no es analizar el concepto, sino buscar ejemplares, individuos a los que podamos aplicar el concepto: la existencia no es una propiedad de objetos, no es un predicado de primer nivel.

---

[22] FREGE, G. (1984a): 154ss.

En el mundo ficticio también *hay* cosas. En *Auto de fe* hay un filólogo que se llama "Peter Kien". Podemos preguntar si existió *realmente*. La pregunta por la primera existencia se responde examinando el texto, la pregunta por la segunda, examinando alguna historia de lo real. El enunciado "Peter Kien odia a las mujeres" es verdadero-en-M_1 (mundo ideado por Elías Canetti). Podemos afirmar existencia en un mundo ficticio, en un mundo ideal como el de la matemática, o en el mundo real. También podemos hacer que varíen los predicados, por ejemplo: "Algunos conceptos son unitarios", "Algunos pares de conceptos tienen intersección no vacía", "Hay conceptos vacíos", "Hay conceptos contradictorios", etc.

Una letra de lugar argumental figura junto al cuantificador, pero no hemos de pensar por eso que el cuantificador es un predicado de objetos, sólo indirectamente se refiere a los objetos que satisfacen o no un predicado, ¡si los hay! El cuantificador cubre predicados, dice qué pasa con su extensión, no sólo si el concepto es o no vacío, también qué relación hay entre la extensión de un predicado y la de otro, y, por supuesto, no todos los conceptos que utilizamos (en nuestros lenguajes naturales y en los lenguajes científicos) subsumen objetos reales.

2. NOMBRES PROPIOS Y DESCRIPCIONES

Algunos autores, como Geach, han interpretado que Frege llama "nombre propio" a aquella expresión cuya referencia es un objeto; sin embargo el camino de Frege, en el conjunto de su obra, es el inverso[23]: algo es un objeto por ser la referencia de un nombre propio. Un nombre propio es una expresión completa que puede ocupar los lugares argumentales de las funciones predicativas de primer nivel. El punto de partida es el lenguaje: qué tipo de entidad es la referencia de una expresión depende del trabajo lingüístico de esa expresión. Los numerales no son nombres propios porque los números son objetos, sino que más bien los números son objetos porque son la referencia de nombres propios, expresiones completas o sin lugares argumentales que completan expresiones de funciones de primer nivel. En este sentido no sólo los nombres ordinarios, sino también las descripciones definidas son nombres propios o nombres de objetos.

Todos los nombres propios tienen, según Frege, sentido; ahora bien, mientras que las descripciones definidas, como "el descubridor de las

[23] Una vez, en nota a pie de página, dice que llama "nombre propio" al nombre de un objeto. Cfr. FREGE, G. (1984a): 99ss.

órbitas elípticas planetarias", parece que muestran desde sí mismas un sentido, podemos preguntar qué sentido puede captar alguien al oír el nombre propio "Kepler" por primera vez. Está claro que quien no entienda el significado de ningún enunciado en el que se use el nombre "Kepler" no conoce ningún sentido de ese nombre y, entonces, no puede referirse a nada con él. Podemos no conocer la referencia de una expresión, pero no podemos *usarla* si no conocemos algún sentido de la expresión. En el caso de los nombres propios, es manifiesto el recurso de Frege al *uso* de la expresión[24]. El sentido con el que cada cual usa el nombre "Kepler" variará según el conocimiento que se tenga de Kepler. Esto significa que el *uso* de "Kepler" requiere de un *sentido*, aunque propiamente ninguno le pertenece mejor que otro.

Podemos señalar dos problemas básicos en relación con las expresiones usadas para hacer referencia a un objeto:

(1) Dos expresiones completas, que tienen la misma referencia, no siempre son intercambiables *salva veritate*.

(2) Hay expresiones completas que no tienen referencia y, no obstante, forman parte de expresiones significativas.

La solución de Frege, consiste en: 1) distinguir en el significado de las expresiones el sentido y la referencia, 2) afirmar que la función referencial de las expresiones está mediada por el sentido y 3) distinguir los discursos directos de los indirectos.

Según Frege distintos sentidos pueden determinar distintas referencias o no. Además hay modos de significar con sentido que fallan en su función referencial. Pero no hay modo de hacer referencia a algo, si no es con la mediación de algún sentido.

Con la descripción definida en lenguaje ordinario podemos hacer usos referenciales sin conocer la referencia y sin saber siquiera si la tiene, aunque la presuponemos al hacer ese uso. La descripción definida se construye a partir de alguna expresión predicativa (simple o compleja): añadiendo el artículo determinado en singular, tratamos de señalar el único objeto que tiene esa propiedad. Dicho extensionalmente, dadas las características de un conjunto, determinamos que dicho conjunto es unitario y con la descripción definida nos referimos a su único elemento.

Hay básicamente dos posturas claras, que se presentan como rivales, acerca de la relación entre los nombres propios y las entidades a las que

[24] Cf. FREGE (1984a): 52.

con ellos nos referimos (o lo pretendemos). Según las teorías descriptivas, se trata de una relación indirecta, según las teorías causales, el nombre propio señala directamente su referencia, sin connotar ninguna de sus propiedades.

2.1. Teoría descriptiva de la referencia

Una de las razones importantes para defender la idea de que no hay modo de hacer referencia a algo sin poner en juego algún concepto, es la diferencia en valor cognitivo que portan los distintos nombres utilizados para denotar el mismo objeto, por ejemplo, el valor cognitivo de las identidades no triviales.

Ni los nombres propios ordinarios ni las descripciones definidas pueden ser sustituidos con generalidad por otras expresiones que denotan el mismo objeto. Cuando un enunciado comienza con verbos como "creer", "saber", "ser necesario", ..., la referencia de la parte subordinada es una proposición, por lo que sus componentes no serán sustituíbles por expresiones con la misma referencia ordinaria, sino que deben tener el mismo *sentido*.

Por ejemplo, si Juan cree que Aristóteles es el autor de la Ética a Nicómaco, lo que Juan cree no es sólo la referencia de "Aristóteles es el autor de la Ética a Nicómaco", sino el significado completo de esa expresión: que un cierto pensamiento es verdadero. Pero si cambiamos "Aristóteles" por "El discípulo de Platón", entonces el pensamiento expresado en "Aristóteles es el autor de la Ética a Nicómaco" no es el mismo que el expresado en "el discípulo de Platón es el autor de la Ética a Nicómaco". Aunque la referencia no ha cambiado, Juan no tiene por qué saberlo, y es posible que crea que ese nuevo pensamiento no es verdadero. En una creencia está contenida la adscripción de verdad al pensamiento de la subordinada. Un cambio en el sentido de la subordinada puede cambiar el valor de verdad del enunciado completo. La sustitución no cambia el valor de verdad del enunciado subordinado, pero sí puede cambiar el pensamiento, es decir, el sentido de dicho enunciado. Si el sentido del enunciado es la referencia en el estilo indirecto, un nombre propio sólo puede sustituirse en estos contextos por otro que tenga el mismo sentido.

Russell parte de la consideración del objeto y llama "nombre propio" a la expresión utilizada para denotar un objeto sin la mediación de ningún sentido. Si no hubiera ningún objeto, no habría ningún nombre propio. Los nombres propios se limitan a denotar. Es más, cuando un nombre connota alguna propiedad, no se trata de un *nombre propio genuino*.

Russell da los siguientes pasos: 1) define el nombre propio como lo que denota sin mediación de un sentido, 2) elimina de la clase de los nombres propios las expresiones que no tienen referencia (descripciones como "el actual rey de Francia"), 3) elimina todas las descripciones definidas, pues si una no es un nombre propio genuino, entonces ninguna lo es, y 4) elimina los nombres propios ordinarios, puesto que pueden reducirse a descripciones. Es decir, acepta la teoría fregeana de que los nombres propios ordinarios denotan con la mediación de algún sentido.

Todas aquellas expresiones que contienen parte de un pensamiento (sentido) y que son calificadas por Frege como nombres propios, Russell prefiere tratarlas como descripciones. Si a y b son nombres propios genuinos, entonces, según Russell, $a = b$ es tan trivial como $a = a$.

Los nombres *lógicamente propios* designan sin connotar, y las únicas expresiones de ese tipo que existen en nuestros lenguajes naturales serían, según Russell, los deícticos. Sin embargo, no está nada claro que haya nombres lógicamente propios en el sentido de Russell, pues cuando un oyente entiende expresiones como "*esto* es blanco" es porque conoce las circunstancias de su emisión y el significado de las expresiones utilizadas. Sin ese conocimiento no podría seleccionar entre lo que tiene a la vista aquello a lo que el hablante se refiere con el deíctico "esto". Según Russell todos los deícticos se pueden reducir al demostrativo "esto", pero tampoco ese deíctico puede denotar nada si no es mediante algún sentido. También él se puede transformar en una descripción: lo que tengo en mi mano y sólo ello, o bien, como dice Quine: el objeto al que estoy apuntando. No sólo estoy diciendo que se puede sustituir por una descripción, sino que el uso de "esto" presupone siempre la aplicación tácita de alguna descripción, lo mismo que el uso del nombre propio "Aristóteles".

No habría mayor diferencia con la doctrina de Frege, si Russell se limitara a afirmar que todo nombre propio se puede reducir a alguna descripción definida. Lo que hace Russell, en realidad, es asumir la idea fregeana de que no hay conocimiento directo de una referencia que sea objetivo, sino que todo conocimiento intersubjetivo es conocimiento descriptivo[25]. También coinciden ambos en afirmar que la verdad del enunciado que contiene un nombre propio depende de la verdad de un enunciado de existencia. El punto de discordia está en que Frege considera que al afirmar un enunciado de ese tipo, se presupone la existencia de la referencia del nombre propio, en caso contrario estaríamos tratando de

[25] Russell defiende la existencia de un conocimiento directo, pero éste pertenece al ámbito de lo subjetivo. Los datos sensibles de uno no pueden ser conocidos por los demás sin alguna inferencia, es decir, si no es descriptivamente. Cfr. Russell (1981): 227.

aplicar un predicado a nada y el enunciado no sería ni verdadero ni falso. Por ejemplo, el enunciado "Ulises fue dejado en Ítaca profundamente dormido" expresa un pensamiento. Si alguien cree en serio que ese enunciado tiene un valor de verdad, atribuirá al nombre "Ulises" una referencia, pues cuando falta la referencia de un nombre no podemos afirmar ni negar nada de ella. En cambio, según Russell, la referencia no sólo se presupone, sino que también se afirma, por tanto, si falta la referencia del nombre propio, el enunciado será falso.

Frege ha explicado el enunciado como analizable en expresiones funcionales y nombres propios (o variables individuales ligadas por cuantificadores). Cuando la función no es saturada por ningún valor argumental, no alcanza ningún valor de verdad.

Russell da a entender que Frege calificaría el enunciado "el actual rey de Francia es calvo" como sinsentido, cuando en realidad lo único que sucede es que es falso. Ahora bien, esta idea no se le puede adscribir a Frege: un enunciado como ese tiene sentido, lo que no tiene es referencia y por tanto no es falso ni verdadero. Una oración que carece de sentido no es lo mismo que un enunciado que expresa un pensamiento falso o uno que expresa un pensamiento que no es ni verdadero ni falso. Podemos construir un nuevo enunciado que expresa un nuevo pensamiento que sí tiene un valor de verdad: "el enunciado «el actual rey de Francia es calvo» es verdadero". Con todo, lo que está claro es que Russell no acepta la falta del valor de verdad de un enunciado cuando falta la referencia de una parte. Tanto la afirmación: "El actual rey de Francia es calvo" como su negación: "El actual rey de Francia no es calvo", son enunciados falsos.

Según Russell, hay tres rompecabezas que toda teoría aceptable de la referencia ha de poder resolver[26]:

(1) Jorge IV deseaba saber si Scott es el autor de Waverley, pero no deseaba saber si Scott es Scott. Por tanto "Scott es el autor de Waverley" no significa lo mismo que "Scott es Scott".

Esto ya lo había indicado Frege y su solución fue distinguir el sentido de la referencia y justificar que en las ocurrencias indirectas lo que importa para el valor de verdad es el sentido de los nombres. Lo que quería saber Jorge IV era si un cierto *pensamiento* es verdadero, la existencia de Scott la da por supuesta. Según Russell, parece que Jorge IV quería saber si existe Scott (entre otras cosas).

[26] RUSSELL (1981): 62 ss.

Cuando Russell supone que el enunciado "Scott es el autor de Waverley" tiene una propiedad que no tiene "Scott es Scott" (que Jorge IV se interesaba por su valor de verdad) no tiene en cuenta que la distinción viene de los distintos pensamientos que expresan; no necesitamos cuantificar existencialmente para justificar esa diferencia.

(2) Para todo nombre propio *a* ha de ser verdadero *Pa* o $\neg Pa$, pero el actual rey de Francia no está ni en la clase de los sabios ni en la clase de los no sabios.

La solución de Russell no es asimilar las descripciones definidas a los nombres propios, sino esos dos tipos de expresiones a una afirmación existencial. Mediante la cuantificación, nos libramos de los problemas ocasionados por los fallos referenciales de los nombres. La propuesta de Frege de que ninguno de los miembros de esa disyunción tiene valor de verdad puede dar lugar a una lógica trivalente, algo que Frege mismo no desarrolla, pues su interés está en diseñar una lógica bivalente a la que reducir la aritmética y simplemente prohíbe la introducción de términos no referenciales.

(3) Enunciados como "Homero no existe" tienen un significado, pero ¿cómo puede una no-entidad ser sujeto en una predicación?

Aunque un nombre propio o una descripción carezca de referencia, las oraciones en las que se usa tienen significado. Los enunciados que niegan la existencia tienen sentido y pueden ser verdaderos. Según Russell, no podríamos preguntar si Homero existió, en el caso de que "Homero" fuera un nombre propio, pues para nombrar una entidad, ésta tiene que existir.

A pesar de la perplejidad que pueda causar en un primer momento, Frege y Russell están "hablando la misma lengua". Si podemos preguntar por la existencia de Homero es porque el nombre "Homero" puede alcanzar una referencia sólo mediante algún concepto, ya que la existencia se aplica a conceptos y no a objetos.

La expresión: "luna de Marte" nombra un concepto vacío, pero la expresión: "la luna de Marte" no nombra nada. Que podamos construir descripciones sin referencia indica que el componente principal del significado de un nombre propio es su sentido.

El problema que encuentra Russell, y para cuya solución no cree que sirva la semántica de Frege, es el de la negación de la existencia. El enun-

ciado "el actual rey de Francia no existe" significa lo mismo que el enunciado "no es cierto que haya ahora un único rey de Francia":

$$\neg \exists x \, \forall y \, (Fx \land (Fy \rightarrow x = y))$$

Pero con esto Frege podría manifestar un completo acuerdo. La existencia es un predicado de segundo nivel, y por eso mismo un enunciado de tipo "hay *a*" o "*a* existe" no está correctamente formado. Lo que se quiere decir con él es que existe una entidad de tipo *P* llamada "*a*": "«Hay Julio César» no es ni verdadero ni falso, sino sin sentido, aunque el enunciado «hay un hombre llamado Julio César» sí tiene sentido; pero en este caso volvemos a tener un concepto"[27].

El enunciado "El actual rey de Francia no existe" lo podemos entender como hace Russell, o también como "el nombre propio «el actual rey de Francia» carece de referencia".

Los rompecabezas reciben soluciones diferentes por parte de Russell y de Frege, pero ninguno de los dos tiene argumentos suficientemente fuertes para rebatir la posición del otro.

Según Frege, la verdad de $P\iota xFx$ presupone la verdad de $\exists x \, \forall y \, (Fx \land (Fy \rightarrow x = y))$, cuando afirmamos que un objeto cae bajo un concepto no afirmamos al mismo tiempo que el objeto existe, sino que el enunciado de existencia es la condición necesaria para que lo afirmado pueda ser verdadero; la ciencia debe asegurar la referencia de todos los nombres que use, si fuera necesario, estipulándola.

En cambio Russell entiende que hemos de asegurar el valor de verdad de todo enunciado. Así, la forma de los enunciados que contienen nombres propios ordinarios o descripciones definidas no es la de una función proposicional saturada con el nombre de un objeto: $P\iota xFx$ o bien Pa, en los casos más sencillos, sino que tienen la forma de un enunciado existencial: $\exists x \, (Fx \land \forall y \, (Fy \rightarrow x = y) \land Px)$.

Russell analiza la descripción definida y los nombres propios ordinarios como abreviaturas de enunciados. Sin embargo, el uso ordinario de un nombre propio o una descripción 1) no comporta un valor de verdad del nombre o la descripción, aunque sí presupone una verdad, 2) ocupa lugares argumentales de predicados de primer nivel, lugares que no pueden ser ocupados por un enunciado, 3) el enunciado admite negación, el nombre propio o la descripción no, 4) ni un nombre propio ni una des-

[27] FREGE (1984a): 111.

cripción definida puede ser la conclusión de un argumento, su transformación enunciativa russelliana sí. Russell transforma la referencia a un objeto, que en principio no es un valor de verdad, en la referencia a un valor de verdad. La descripción tampoco se comporta en el cálculo igual que la fórmula existencial, pues una descripción (ιxFx) no es una fórmula bien formada.

La presuposición de la que habla Frege puede dar lugar una lógica trivalente. Si es verdad que $\neg\exists x\ \forall y\ (Fx\ \wedge\ (Fy \rightarrow x = y))$, entonces no es verdad ni $C\iota xFx$ ni $\neg C\iota xFx$, necesitamos un tercer valor si no queremos asimilar el uso de una descripción al uso de un enunciado y queremos que nuestro análisis de condiciones de verdad no elimine a priori la posibilidad de utilizar descripciones que no hacen referencia a nada.

Independientemente de qué postura se adopte en este punto concreto, y a pesar de las diferencias, tanto Russell como Frege entienden que los nombres propios ordinarios esconden descripciones definidas. La cuantificación contribuye a mostrar cómo hacemos referencia a algo mediante conceptos y, a veces, no tenemos éxito.

2.2. Teoría causal de la referencia

Según las teorías causales, los nombres propios y las descripciones definidas no son asimilables. La referencia se fija inicialmente mediante una descripción o mediante ostensión, después hay una cadena histórico-causal que va ligando los sucesivos usos exitosos del término, de modo que su referencia permanece rígida, mientras las descripciones asociadas pueden ir cambiando, incluso se puede negar la descripción inicial que sirvió para fijarla. Cuando a es *el x que tal y tal*, podemos concebir una situación en la que a no es *el x que tal y tal*. En esa situación, la descripción señala otro objeto, si lo hay, pero a sigue señalando al objeto que en la situación real es *el x que tal y tal*.

Los defensores de la teoría causal utilizan tres argumentos principales:

1) Los nombres propios designan el mismo objeto en toda situación contrafáctica en la que exista el objeto; por tanto, designan rígidamente.

2) A veces asociamos con un nombre una descripción que aporta una información errónea y, no obstante, logramos señalar el objeto acerca del cual queremos decir algo; de hecho, podemos negar

cada descripción asociada con un nombre propio sin perder su referencia; por tanto, el nombre propio designa rígidamente.

3) Si el significado de un nombre fuera el de una descripción, entonces el portador tendría *necesariamente* las propiedades que la descripción le asocia y toda afirmación de tipo "a es ιxFx" sería analítica o contradictoria.

Kripke defiende la idea de que los nombres propios ordinarios son designadores rígidos, es decir, denotan sin connotar, y son designadores rígidos porque podemos hablar de "lo que podría haberle ocurrido a *a* si no hubiera sido un *P*, *Q*, ...", podemos designar el mismo individuo en todo mundo posible en el que exista, aunque no conserve los predicados que comúnmente le asociamos.

Ahora bien, si conocer el significado de dos nombres propios, *a* y *b*, se reduce a conocer su referencia, entonces la única información contenida en un enunciado de identidad verdadero sería una información lingüística: que disponemos de dos signos para nombrar un cierto objeto.

El primer paso en esta dirección lo había dado ya Russell, al tratar de solucionar el problema de que hay enunciados verdaderos que contienen nombres propios sin referencia. Pero, mientras que Russell considera que un nombre propio como "Aristóteles" es una descripción disfrazada o abreviada, Kripke pretende que las diversas descripciones que se le pueden asociar no juegan ningún papel en la función referencial del nombre. Todo el conocimiento proporcionado por esas descripciones puede ser, en realidad, falso; conservando, no obstante, el término "Aristóteles" su referencia. Nombres propios y descripciones no tienen el mismo poder semántico. El nombre propio no es una descripción disfrazada.

Un nombre propio está asociado directamente con el objeto, mientras que una descripción definida nos indica el modo en que señalamos el objeto. Una descripción definida puede servir para introducir el nombre propio de un objeto, pero, una vez introducido, no juega ningún papel a la hora de usar ese nombre para señalar el objeto.

Este segundo argumento se resume en la idea de que podemos negar cada descripción asociada a un nombre propio, por tanto las descripciones no median en el uso referencial de un nombre propio. Con esto Kripke parece presuponer que del hecho de que podamos negar una descripción *cualquiera* se sigue que podemos negarlas todas *a la vez*. Pero, como dice Searle, si alguien "descubriese" que Aristóteles no escribió ninguna de las obras que se le atribuyen, que nunca estuvo cer-

ca de Atenas, ni conoció a Platón, ni fue un filósofo, sino que en realidad era un pescadero veneciano del Renacimiento tardío, el "descubrimiento" no pasaría de ser un mal chiste. Si negamos todas las creencias asociadas con el nombre propio "Aristóteles" ¿cómo podríamos seguir usando este nombre?, ¿cómo podemos descubrir que todos los predicados que creemos verdaderos de Aristóteles son en realidad falsos?, falsos ¿de quién? En ninguna situación contrafáctica podemos negar todos los enunciados que contienen ese nombre, sin perder con ello la referencia.

También Dummett ataca duramente la idea de que podamos negar toda descripción:

> nombres de lugares, nombres de los meses y días de la semana, nombres de carreras, nombres de juegos, de aperturas de ajedrez, de estrellas y constelaciones, de teoremas matemáticos, de poemas, de bailes, de religiones, vientos, tempestades, escrituras y lenguajes, huracanes, exhibiciones, guerras y tratados, remolinos, teorías científicas. Para muy pocos de estos nombres es siquiera inteligible decir que pudiéramos llegar a desmentir los medios que usamos para explicar sus nombres a alguien que no los conociera; y de muy pocas clases de nombres es verosímil sostener que su referencia, tal y como lo usamos, depende de para qué fue introducido originalmente el nombre. Sería, creo, un grave error suponer que, con la teoría causal, ha sido por fin descubierto el mecanismo de la referencia; todavía menos que se ha mostrado que es redundante la noción del sentido de un nombre[28].

En casos extremos, podríamos estar dispuestos a admitir que allí donde creíamos que había un objeto no había en realidad nada, pero no vamos a admitir que Aristóteles (al que nos queríamos referir) era en realidad un pescador del Renacimiento tardío.

El nombre no tiene ningún poder mágico para señalar un objeto independientemente del sentido con el que se use. Otra cosa es que podamos construir un cálculo modal, con una semántica adecuada, estipulando la referencia rígida de las constantes individuales, estipulando que la referencia de un nombre propio se conserva en distintos mundos posibles o situaciones contrafácticas, porque la situación contrafáctica la concebimos como situación posible *para un objeto* y no para la referencia (la que sea) de un nombre. En la lógica sólo nos interesan las condiciones de verdad, prescindimos de los pensamientos empíricos expresados en los enunciados.

---

[28] DUMMETT (1990): 119.

Finalmente, al argumento de que si el sentido de un nombre propio se pudiera identificar con el significado de las descripciones definidas que nombran el mismo objeto, entonces todas las identidades verdaderas serían analíticas, podemos objetar que cuando se trata de objetos reales, nuestro conocimiento es muy limitado y no podemos agotar el conjunto de los predicados que se podrían decir con verdad del objeto. No es lo mismo el lenguaje formal que el ordinario. En el primero, se exige que los nombres estén bien definidos, de modo que el usuario particular no intervenga en la determinación de la referencia. En el lenguaje ordinario existen distintas descripciones asociadas con cada nombre propio, incluso descripciones que determinan distintas referencias.

Kripke pone el siguiente ejemplo[29]: Supongamos que hay algún cometa que por las tardes da un tirón a Venus y que Marte ocupa entonces su lugar. ¿Diremos que es una situación en la que Hesperus es distinto de Phosphorus? No, dice Kripke, es una situación en la que Hesperus (es decir, Phosphorus) no ocupa la posición que normalmente ocupa por la tarde. Es claro que Kripke no permite concebir aquellas situaciones contrafácticas que refuten sus tesis principales. Las situaciones contrafácticas kripkeanas son situaciones posibles para un *objeto seleccionado*, no para la referencia de un nombre. Supone una situación en la que Hesperus sigue siendo Phosphorus, pero ese objeto ha cambiado en algunas de sus propiedades. Esto no dice nada contra la teoría de la referencia *indirecta*. También podemos suponer que llamamos "Hesperus" al cuerpo celeste que ocupa las posiciones $s_1, ..., s_n$ en el tiempo $t_1, ..., t_n$ y llamamos "Phosphorus" al cuerpo celeste que ocupa $s'_1, ..., s'_n$ en $t'_1, ..., t'_n$.

Podemos tener un mundo posible en el cual el mismo cuerpo celeste ocupa $s_1, ..., s_n$ en $t_1, ..., t_n$ y $s'_1, ..., s'_n$ en $t'_1, ..., t'_n$. Entonces Hesperus es Phosphorus. Pero también podemos concebir un mundo posible en el cual dos cuerpos distintos ocupan esas posiciones. Entonces Hesperus es distinto de Phosphorus. ¿O es que después de un descubrimiento científico ya no es concebible que las cosas hubieran sido de otra manera? ¿Cuáles son las bases kripkeanas de lo concebible?

En una lógica podemos estipular la verdad de $a = b$ y la de Fa en M_0 y la verdad de $\neg Fa$ en M_1, porque los signos sólo tienen referencia. Al concebir la posibilidad de $\neg Fa$ estamos concibiendo una situación contrafáctica para *el objeto* designado mediante "*a*" y mediante "*b*" *en* M_0.

Pero en los lenguajes naturales las cosas no funcionan así, pues no sabemos de qué estamos hablando si no es subsumiendo el objeto bajo

---

[29] Cfr. KRIPKE: "Identidad y necesidad", en Valdés (ed.) (1991): 120,1.

algún concepto. Los nombres propios tienen referencia sólo si hay un objeto que satisface su *sentido*.

Si los nombres propios designaran sin mediación del *sentido* habría que admitir el principio de sustitución de los idénticos sin restricción, dondequiera que tuviéramos nombres propios del mismo objeto. Pero la sustitución de los idénticos no asegura la conservación de la verdad en los contextos indirectos. Si *A* cree $Fa \wedge \neg Fb$, siendo $a = b$, y siendo *A* un hablante competente y veraz, hay que distinguir el sentido de la referencia de los nombres propios.

Es imposible cambiar todos los criterios de uso de un nombre propio sin cambiar su referencia. El nombre propio "10", por ejemplo, significa un número bajo los criterios del sistema decimal y otro número bajo los criterios del sistema binario. Las estipulaciones, convenciones, creencias, etc., que se asocian con un nombre propio son criterios o métodos para re-conocer la referencia, para identificarla o determinarla.

Kripke tiene que explicarnos qué hay en "*b*", que no hay en "*a*", para que el enunciado "$a = b$" no tenga el mismo valor cognitivo que el enunciado "$a = a$". ¿Cómo contribuye el significado de los nombres propios a la información contenida en algunos enunciados de identidad?

En realidad Kripke no logra liberarse completamente de las descripciones que acompañan al uso de los nombres. Termina reconociendo que algunos de los datos conocidos sobre el objeto no podemos negarlos sin perder, con ello, la referencia, retomando la clásica distinción entre propiedades esenciales y propiedades accidentales de las cosas. Podemos concebir situaciones contrafácticas en las que los objetos carezcan de cualquiera de sus propiedades accidentales, pero no le puede faltar ninguna de las esenciales. La posible variabilidad de las propiedades encuentra su primer límite en el origen del objeto (para el caso de los nombres de personas, su fecha de nacimiento y linaje).

Kripke y Putnam afirman que la teoría descriptiva es claramente falsa en el caso de términos generales y términos masa[30]. En este contexto aparecen los compromisos metafísicos fuertes de la teoría causal. En la "Tierra Gemela" ideada por Putnam, T_2, las cosas no son lo que parecen. En T_2 el agua no es H_2O, sino *XYZ*, sin embargo no hay modo de distinguir esa sustancia de la compuesta por un volumen de oxígeno y dos de hidrógeno: quita la sed, es inodora, es el componente más abundante de

[30] Un término masa es aquel que puede aplicarse tanto a un todo como a sus partes; por ejemplo, "agua".

la superficie de T_2, forma los ríos, los mares, etc. Dicho de otro modo, en T_2 se pueden mantener todas las descripciones asociadas al uso de "agua" en T_1 (el planeta Tierra). Es un realismo metafísico científico que afirma la posibilidad de fijar esencias de modo que su identidad no dependa, en ningún sentido, del modo de describirlas.

La teoría descriptiva resulta ser más pragmática y menos esencialista, puede defender la inescrutabilidad de la referencia y señalar que las consecuencias prácticas (iguales en T_1 y en T_2) son lo importante y no entendemos qué significa decir que los materiales son distintos, a menos que contemos con alguna descripción que los distinga. La teoría causal rechaza el holismo semántico en cualquiera de sus formas, es decir ni acepta la tesis del holismo semántico moderado: que el significado de una expresión de un lenguaje L depende del significado de otras expresiones de L, aunque no de todas, que hay contextos de uso que dan el significado de una expresión x y contextos de uso que más bien dependen del significado que ya tiene esa expresión x; ni mucho menos acepta la tesis del holismo semántico radical: que el significado de *cada* expresión de un lenguaje L depende del significado de *todas* las expresiones de L. La teoría causal busca una explicación última de la referencia que relacione algunas palabras directamente con el mundo, que la referencia no sea dependiente del significado de otras palabras.

3. IDENTIDAD

Las afirmaciones de identidad informativas, nos dice Frege, no pueden ser la afirmación de una relación entre objetos ni la de una relación entre sus nombres. Si los nombres sólo tuvieran una referencia y no un sentido, o bien $a = b$ dice lo mismo que $a = a$ o bien es falso $a = b$, pero si la identidad es una relación sólo entre nombres, al afirmar $a = b$ sólo estamos afirmando que disponemos de dos nombres para referirnos a un único objeto. Ésta sería una información sobre el lenguaje utilizado, no sobre la cosa designada, pero algunos enunciados de identidad proporcionan un conocimiento no meramente lingüístico; por tanto, el significado de un nombre propio no se puede agotar en su hacer referencia a un objeto. Muchas identidades de tipo $a = b$ contienen verdadero conocimiento porque a la diferencia de signos corresponde una diferencia de modos de dar la referencia.

Si enunciados del tipo $a = b$ pueden sorprendernos, el significado completo de "a" no puede ser el mismo que el de "b", pero si la identidad

es verdadera, "*a*" denota el mismo objeto que "*b*", por tanto, las expresiones "significado de «*a*»" y "referencia de «*a*»" no son equivalentes.

Para explicar el sentido de los nombres propios, Frege acude siempre a las descripciones definidas y al uso que un sujeto determinado hace del nombre, es decir, propiamente los nombres son *usados* con algún sentido; quien no asocie ningún sentido con un nombre propio, no logrará hacer referencia a nada. No es que el sentido de un nombre propio como "Aristóteles", por ejemplo, sea el sentido de una descripción definida, como a veces se ha dicho, lo que ocurre más bien es que esa marca lingüística no llega a ser un signo útil para señalar un objeto y predicar algo de él, a menos que el usuario asocie algún conocimiento descriptivo del objeto.

Una identidad no trivial afirmaría que el objeto identificado *como* ιxFx es el mismo objeto que el identificado *como* ιxGx:

$$\exists x\ \forall y\ (Fx\ \wedge\ Gx\ \wedge\ (Fy \to x = y)\ \wedge\ (Gy \to x = y))$$

Algún x es F y G y hay un único objeto que es F y un único objeto que es G. Cuando lo que tenemos no es una descripción definida, sino un nombre propio, podemos expresar esta idea así:

$$\forall y\ (Fa\ \wedge\ Gb\ \wedge\ (Fy \to a = y)\ \wedge\ (Gy \to b = y)\ \wedge\ (Fy \to Gy))$$

a es F, b es G, todo lo que es F es a, todo lo que es G es b y todo lo que es F es G. Dicho de otro modo: hay un único F y es a, hay un único G y es b y todo lo que es F es G; es decir, a es el mismo objeto que b.

En una descripción definida las palabras componentes y la conexión establecida entre ellas son capaces de expresar por sí mismas un *sentido*, porque son expresiones complejas que contienen nombres de conceptos, los cuales indican ya el conocimiento que aplicamos para fijar (determinar, construir, encontrar, según el caso) la referencia. El enunciado de identidad

la estrella matutina = la estrella vespertina

señala la intersección no-vacía de dos conceptos unitarios. Es porque las características del concepto *estrella matutina* no coinciden con las características del concepto *estrella vespertina* por lo que el modo en que se determina el único objeto que cae bajo *estrella matutina* no coincide con el modo de determinación del único objeto que cae bajo *estrella vespertina*. *Estrella matutina* y *estrella vespertina* son distintos conceptos unitarios co-extensivos.

Si tenemos tres rectas *a*, *b* y *c*, y preguntamos: ¿es la intersección ab = la intersección *ac*?, estamos preguntando si los dos conceptos (unitarios) correspondientes tienen intersección no vacía. Esto es algo que no se sabe a priori. Si la identidad es verdadera, también será informativa. Las expresiones igualadas tendrían la misma referencia, pero distinto sentido, incluso después de conocer la verdad de la identidad.

La noción de identidad que Frege trata de aclarar es una noción absoluta: identificación de un único objeto por distintos medios, utilizando distintas reglas.

Geach ha propuesto interpretar todo enunciado de identidad no como una relación absoluta de algún tipo, sino como una relación relativa a algún concepto, por ejemplo:

a es el mismo *hombre* que *b*.

Podemos aceptar este enunciado como un enunciado de identidad, ahora bien ¿cómo explicamos la identidad?, ¿qué es lo que queremos saber cuando preguntamos si *a* y *b* son el mismo hombre? No podemos dar el enunciado mismo como respuesta a esta pregunta. La respuesta es que queremos saber si, dentro de la clase de los hombres, $\iota xFx = \iota xQx$, si el enunciado de identidad

El hombre llamado "*a*" es el hombre llamado "*b*"

es verdadero. Esta es una relación de identidad absoluta. Una identidad no trivial contiene siempre no uno, sino al menos dos conceptos, queremos saber si es único el objeto que está siendo descrito de dos modos diferentes, en términos extensionales: si hay dos conjuntos unitarios que tienen intersección no vacía.

Geach se fija en la explicación que Frege da de la identidad numérica: que necesitamos siempre tener dos entidades distintas, pero ambas de *cierto tipo*, y una relación especial entre ellas. Sigue a Frege al decir que en toda identificación de objetos aplicamos algún concepto, pero se aparta de él al decir que toda identidad se puede reducir a una identidad relativa a un concepto.

Se dice que una afirmación de identidad ni garantiza ni define un acuerdo en todas las propiedades de "los objetos" identificados, pero lo que ocurre es que no tenemos primero dos objetos que comparar y después comprobamos que comparten todas sus propiedades y son, por tanto, el mismo, no identificamos un objeto *a* con un objeto *b*, sino que identificamos *un* objeto como la referencia de dos nombres.

¿Es, después de todo, la identidad una noción primitiva, que no se deja reducir a otras nociones? Al decir que "*a* puede ser el mismo *F*, pero distinto *G* que *b*", como afirma Geach, ¿estamos diciendo algo sobre la identidad? Es muy difícil aceptar que lo que pasa por ser un único objeto (llamado "*a*" y llamado "*b*") al considerarlo como un *F*, pueda desdoblarse en dos al considerar los elementos de *G*. Debajo de la propuesta para entender la identidad como identidad relativa hay un problema con la identidad misma: ¿cómo podemos decir que el objeto *a*, que cae bajo *F* y que es el mismo que *b* bajo *F*, es *el mismo objeto a* que cae bajo *G* pero es distinto de *b* bajo *G*?, ¿cómo comparamos e identificamos *un único* objeto de *F* con *dos* objetos de *G*? Como dijo Leibniz y subrayó Wittgenstein: si hay dos, no son el mismo, podrían, si acaso, *tener* la misma personalidad o la misma forma o el mismo color, etc., pero serían dos. Que podamos decir que Dr. Jeckyll y Mr. Hyde son el mismo hombre pero distintas personas (aparte de discutible) puede querer decir que *un* hombre tiene *dos* personalidades, pero no que hay dos personas distintas que son un solo hombre, que hay dos objetos (de tipo *F*) que son uno (de tipo *G*).

Al considerar distintos mundos posibles, lo único que puede ocurrir para un objeto dado de M_0 es o bien que no exista en M_n o bien que siga siendo uno. Si siempre pudiéramos tomar un objeto en nuestras manos, como sugiere Kripke, lo único que puede ocurrir al concebir distintos contextos *para él* es que cambien algunas de sus propiedades, pero no que se desdoble en dos objetos.

Es cierto que Frege defiende la idea de que qué sea un objeto es relativo al concepto considerado. Si tomo una baraja en mis manos, estoy tomando *un* objeto de los que caen bajo el concepto *baraja*. Si ahora, sin soltar lo que tengo en mis manos, considero el concepto *carta*, resulta que lo que antes era uno ha pasado a ser nada menos que 40, pero una cosa es decir que depende del concepto lo que ha de contar como objeto subsumible bajo él y otra decir que un objeto que cae bajo *F* puede ser 40 cuando aplicamos el concepto *G*. Aunque *cuarenta* cartas formen *una* baraja, no tenemos 40 cartas que sean, en algún sentido, *la misma* baraja, cada una de las cartas no es la *misma baraja* que otra carta, sino que son 40 cartas *de* la misma baraja. Y es que una carta no cae bajo el concepto *baraja*, pero si podemos decir que Pedro es el *mismo hombre* que Juan, es porque la referencia de "Juan" cae bajo el concepto hombre, lo cual no explica por qué es la referencia de dos nombres distintos.

Veamos cuál es el análisis de Frege y por qué no extrae la conclusión de que la identidad puede ser una noción relativa. En primer lugar, para

usar significativamente un nombre propio hemos de disponer de una *regla* para decidir el valor de verdad de un enunciado de identidad, hemos de poder decidir cuándo dos nombres propios se refieren a lo mismo. Podemos introducir objetos en nuestro universo de discurso, si podemos fijar condiciones de identidad para ellos.

Frege busca un criterio para identificar direcciones sin hacer uso del término "dirección" y la regla-función que encuentra para este caso concreto es la relación de paralelismo:

> la dirección de *a* = la dirección de *b* si y sólo si *a* es paralela a *b*

Decir que la dirección de *a* es la misma que la dirección de *b* equivale a decir que *a* es paralela a *b*, y esto proporciona información semántica acerca del uso del término general *dirección*. El significado del término general "dirección" es entonces componente del sentido del término singular formado a partir de él: "la dirección de *a*".

Por supuesto el criterio se aplica a aquello en lo que Frege estaba más interesado, el concepto de número:

> el número de *F* = el número de *G* si y sólo si *F* y *G* están en relación biyectiva[31].

Si la recta *a* es paralela a la recta *b*, también podemos decir que *a* y *b* son iguales en dirección. Esto a su vez es transformable en: "la dirección de *a es* la dirección de *b*". No se igualan rectas, sino direcciones de rectas. Dadas las rectas *a* y *b*, podemos distinguirlas y afirmar su coincidencia en un aspecto. Esta es la estrategia que trata de continuar aplicando Geach, quien no entiende cómo Frege no supo extraer la consecuencia de que la identidad es relativa. Pero en realidad Frege está tratando de identificar objetos matemáticos (números) y en ningún momento confunde los conceptos utilizados en las descripciones de los objetos con la relación que justifica su identificación. Aunque a y b son iguales en dirección, *a* no es la misma dirección que *b*, *a* y *b* no son direcciones, sino rectas.

Frege explica esa identidad de direcciones diciendo que hay una relación de equivalencia (paralelismo) que provoca una partición en el conjunto origen de las rectas, una relación que ordena todas las rectas del plano en clases disyuntas. A cada una de esas clases le podemos poner un nombre propio, por ejemplo, "la dirección de *a*". "La dirección

[31] Una relación entre dos conjuntos, F y G, es biyectiva cuando asocia con cada F un único G y con cada G un único F.

de *a*” es la clase de las rectas paralelas a una recta dada y *a* y *b* pertenecen a esa clase.

Las relaciones de equivalencia (paralelismo, biyección) se pueden transformar en identidades absolutas. En el enunciado de identidad no trivial hay algo idéntico, que lo hace verdadero, y algo distinto, que lo hace informativo y la información es aportada por la equivalencia extensional de los conceptos. En la verdad del enunciado “la dirección de *a* = la dirección de *b*”, hay criterios de distinción: las rectas *a* y *b* no comparten todas sus propiedades, y criterios de identidad: las rectas *a* y *b* tienen las propiedades requeridas para *caer bajo* el concepto “paralela a *a*”. Pero, cuidado, lo que estamos identificando no son las rectas *a* y *b* relativamente a la relación de paralelismo, sino *direcciones*.

Fijándonos en el segundo ejemplo, lo que Frege hace no es reducir un enunciado de tipo “*a* = *b*” a uno como “*a* es *el mismo número* que *b*”, sino que eso es lo que queremos explicar, señalando la existencia de *dos* conceptos distintos (*F* y *G*) y una relación entre ambos (biyección).

En realidad Frege está indicando dos procedimientos distintos para identificar propiamente clases: la clase de las rectas paralelas a una recta dada (una dirección) y la clase de los conceptos en relación biyectiva con un concepto dado (un número).

Podemos distinguir dos tipos de expresiones para nombrar objetos:

1) expresiones compuestas por un operador de los que hemos llamado “objetuales”, por ejemplo, “La capital de *España*”, y
2) expresiones que están compuestas por un artículo determinado en singular y un nombre de concepto, por ejemplo, “La estrella matutina”.

Si aceptamos que todo nombre propio ordinario se puede reducir a alguna descripción definida, en los dos tipos señalados tendríamos únicamente expresiones de conceptos e indicadores de existencia de un único objeto.

Tomemos las siguientes identidades:

1) La dirección de la recta $x = y$ *es* la dirección de la recta $x + 1 = y$.
2) La estrella matutina *es* la estrella vespertina.

En ambas podemos reconocer expresiones distintas, con significados distintos, a ambos lados del signo de identidad, y es ahí donde hemos de buscar la información que el enunciado (de ser verdadero) contiene:

1) Las rectas $x = y$ y $x + 1 = y$ (distintas) están en cierta relación (paralelismo).
2) Los conceptos unitarios *estrella matutina* y *estrella vespertina* (distintos) están en cierta relación (intersección no-vacía).

En general, para identificar un objeto necesitamos no uno, sino al menos dos conceptos y cierta relación entre ellos, lo cual no quiere decir que hay una identificación *relativa a esos* conceptos. La identidad es una relación absoluta.

> *G* y *F tienen* el mismo número (si hay cierta relación entre ellos), pero no *son* el mismo número.

La capacidad informativa de una identidad se ha de explicar mediante los distintos significados de las distintas expresiones utilizadas para hacer referencia al mismo objeto: en una identidad verdadera no hay dos objetos, menos aún dos objetos que puedan identificarse como uno. La identidad no es una relación entre objetos.

Sólo los nombres lógicamente propios, las constantes individuales en un lenguaje formal, para los cuales se estipula una referencia, nos permiten hablar de identidad sin hacer uso de propiedades. En la lógica kripkeana, podemos estipular que a existe en M_0 y en M_1 y no hay nada más que preguntar acerca de su identidad en cuanto a la unicidad. Podemos preguntar qué predicados satisface en M_0 y cuáles en M_1, pero no qué predicados satisface un objeto que hemos "descubierto" en M_1 y queremos saber si se trata del objeto a o de otro objeto. No, las situaciones contrafácticas no son de ese tipo. Otra cosa ocurre con las descripciones definidas, pues éstas contienen predicaciones que pueden variar de un mundo posible a otro. Puede ser que "$a = \iota x\, Fx$" sea un enunciado verdadero en M_0, pero falso en M_1. También "$\exists x\, \forall y\, (Fx \wedge (Fy \rightarrow x = y) \wedge x = a)$" puede ser verdadero en un mundo y falso en otro, sin que esto nos cause ningún problema acerca de la existencia del mismo objeto en ambos mundos, simplemente hemos *estipulado* que el objeto a existe en ambos y tiene una propiedad F en M_0 que no tiene o no tiene sólo él en M_1.

El problema de la identificación de un objeto se presenta con toda su fuerza en los lenguajes naturales, pues hacemos referencia a un objeto mediante algún sentido, pero si el uso de un nombre propio no se asocia con ninguna descripción del objeto, que es lo que podemos hacer en un lenguaje formal, entonces vale el principio kripkeano

$$\forall x\, \forall y\, (x = y \rightarrow \Box\, x = y)$$

Pero hemos de observar que el operador de necesidad afecta al enunciado completo, lo que se afirma es que si una identidad es verdadera, lo es necesariamente, que si la referencia de un nombre es la misma que la referencia de otro, lo es necesariamente ($a = b \rightarrow \Box\, a = b$), pero no afirmamos que necesariamente la referencia del nombre es la que es.

Con todo, Frege se resiste a dar una definición de la identidad. La identidad es uno de los principios lógicos básicos y no puede ser definida. A fin de cuentas, una definición es una identificación. Todo lo que se diga sobre la identidad la presupone. Una definición de la identidad traspasaría los límites del lenguaje, pero el principio leibniziano de sustitución de los idénticos[32] muestra, según Frege, la naturaleza de la identidad.

El problema filosófico es, además del de dar criterios de identificación de objetos, determinar a qué estamos llamando "objeto". Frege asume que nuestro conocimiento de ellos es un conocimiento que tiene que ver sólo con conceptos y con relaciones entre conceptos. Si esto es así, estaría asumiendo también la identidad de los indiscernibles. No hay *dos* entidades que compartan todas sus propiedades. Los indiscernibles son idénticos, pues no hay nada, aparte de las propiedades, que pueda servir para distinguir una entidad de otra. No puede haber dos individuos discernibles sólo en número.

Ahora bien, ¿es la identidad reducible a indiscernibilidad? Indiscernibilidad implica identidad y viceversa. Esto significa que si y sólo si bajo todo concepto que cae a, cae b y bajo todo concepto que cae b, cae a, entonces $a = b$. Formalmente, indiscernibilidad e identidad son equivalentes

$$\forall x\ \forall y\ (x = y \leftrightarrow \forall P\ (Px \leftrightarrow Py))$$

pero nocionalmente, se distinguen. Es otro modo de decir que hay identidades no triviales.

En general, no deberíamos confundir la noción de *referencia* con la de *objeto*. Al hacer referencia a algo, no es seguro que siempre alcancemos un objeto. La primera es una noción semántica, la segunda es una noción ontológica. No por concebir un *sentido* tenemos asegurada una referencia.

El objeto mismo nunca queda plenamente determinado, cuando se trata de objetos reales. Para delimitar claramente un objeto, para cono-

[32] "Eadem sunt quorum unum in alterius locum substitui potest, salva veritate", Leibniz (1961): vol. VII, 219.

cerlo completamente, necesitaríamos conocer todos los *sentidos* que pudieran pertenecerle.

> El sentido de un nombre propio lo comprende todo aquel que conoce el lenguaje o el conjunto de designaciones al que pertenece; pero con ello, la referencia, caso de que exista, queda sólo parcialmente iluminada. Un conocimiento completo de la referencia implicaría que, de cada sentido dado, pudiéramos indicar inmediatamente si le pertenece o no. Esto no lo logramos nunca[33].

Frege, como Leibniz, no discute la distinción conceptual entre identidad e indiscernibilidad porque está pensando en un lenguaje universal ideal, útil para la ciencia. En este contexto los dos tienen que afirmar que la indiscernibilidad basta para la identidad, pero son nociones diferentes. La identidad de los indiscernibles no es un principio analítico en Leibniz, sino que lo deriva del Principio de Razón Suficiente. No puede haber dos mundos posibles (M_1, M_2) tales que los objetos de M_1 sean cualitativamente iguales a los objetos de M_2, pues no habría una razón suficiente para que Dios elija crear uno más bien que el otro. Y dado que cada mónada refleja el universo entero, ni siquiera puede haber dos mundos posibles tales que compartan tan sólo uno de los objetos. Una situación contrafáctica en el sentido kripkeano, sería una contradicción en los términos para Leibniz. La noción leibniciana de posibilidad es radicalmente distinta de la kripkeana. Llevar a la existencia a un individuo a_1 es llevar a la existencia un mundo M_1. Como dice B. Mates[34], si cualquiera de nosotros no existiera, Adán no habría existido.

Dados dos conceptos completos, la investigación acerca de si se trata de dos individuos o sólo de uno se reducirá a una investigación sobre igualdad cualitativa, pero puesto que el análisis de un concepto individual es infinito, parece que no está a nuestro alcance tal investigación.

No tenemos conceptos individuales completos de objetos reales, de modo que nuestro lenguaje tiende al objeto, pero no lo alcanza. El objeto es como un punto en el que convergen o al que tiende un conjunto de propiedades. Con la identidad estipulamos que dos o más sentidos determinan la misma referencia, que no conocemos completamente, pues no podemos llegar a conocer todos los sentidos que convienen al objeto. La discernibilidad es un criterio suficiente para negar la identidad. Con dos propiedades distintas, ϕ y ψ, no podemos todavía afirmar que hay un úni-

---

33 FREGE (1984a): 51,2.

34 Cfr. MATES, B.: “Individuals and Modality in the Philosophy of Leibniz”, en *Studia Leibnitiana* 1972, **4**, 2: 81-118.

co objeto que satisface ambos predicados, pero si el conjunto unión $\phi \cup \psi$ es contradictorio y *a* pertenece a ϕ y *b* pertenece a ψ, sabemos que $a \neq b$.

En cambio podemos afirmar indiscernibilidad en relación a un conocimiento (lenguaje) particular sin estar obligados a afirmar todavía identidad. Si limitamos nuestro lenguaje a lo conocido, *a* es indiscernible de *b* si y sólo si para todo *F conocido* ($Fa \leftrightarrow Fb$). Pero al mismo tiempo podemos dejar la ontología de ese lenguaje indeterminada, en el sentido de no comprometernos con la afirmación $a = b$. Todo lo que decimos es que, relativamente a un conocimiento, a y b son indiscernibles. Si añadimos un predicado nuevo *G* a ese lenguaje es posible ($Ga \wedge \neg Gb$). De modo que lo que antes era indiscernible se hace ahora discernible. En cambio no tendría sentido decir que lo que antes era idéntico (un objeto) es ahora distinto (dos objetos). La identidad no es pues otro nombre para indiscernibilidad.

IV
OTRAS LÓGICAS

En la lógica clásica se exige que el concepto tenga un límite preciso, que para cualquier objeto dado podamos decidir si cae o no bajo el concepto. No es preciso que el concepto esté libre de contradicción, tienen cabida los conceptos contradictorios y los conceptos vacíos, pero no los conceptos vagos. Se presupone, además, que todas sus fórmulas atómicas tienen un valor de verdad asociado, que sólo hay dos valores de verdad y que cada uno de ellos es la negación del otro.

Pero podemos preguntarnos si ese presupuesto (de bivalencia) respeta el uso que en los lenguajes naturales se hace de la partícula "no". Parece que cuando negamos una afirmación hecha por alguien lo que queremos hacer es señalar que es falso lo que ha dicho. ¿Esto quiere decir que la negación de esa afirmación da lugar a una nueva afirmación que es verdadera?, ¿utilizamos esa expresión siempre con el mismo significado?, ¿siempre se cancelan dos negaciones? Además ¿es seguro que al negar una afirmación siempre queremos señalar que lo afirmado es falso?

Esos presupuestos de la lógica clásica se concretan en que para todo objeto y para todo predicado vale $(\Psi\alpha \vee \neg\Psi\alpha)$ y $\neg (\Psi\alpha \wedge \neg\Psi\alpha)$, o en lógica proposicional: $(p \vee \neg p)$ y $\neg (p \wedge \neg p)$. En el sistema clásico, la bivalencia y la no contradicción son mutuamente dependientes, se pueden demostrar como teoremas y están estrechamente ligados al significado de la negación en el sistema. Ahora bien, hay enunciados, que pueden intervenir en argumentaciones intuitivamente válidas, que parecen no sujetarse a esas exigencias. Consideremos los siguientes enunciados:

(1) Si 2 es distinto de 2, Bertrand Russell es Dios.

(2) Mañana habrá una batalla naval.

(3) La clase de todas las clases que no son miembros de sí misma no es un miembro de sí misma.

(4) Gödel era calvo.

La no aceptación de que podamos afirmar como verdadero cualquier enunciado a partir de una afirmación contradictoria, como sucede en el enunciado (1), ha provocado una discusión sobre la exigencia de una relación de relevancia (semántica y sintáctica) entre el antecedente y el consecuente de un condicional y entre cada una de las premisas y la conclusión de un argumento, para que podamos hablar de relación de implicación entre el antecedente y el consecuente o entre el conjunto de las premisas y la conclusión. En este contexto, se llega a una definición de la implicación estricta (que no es sino una definición de nuestra implicación clásica) introduciendo operadores modales para expresar en lenguaje-fórmula la modalidad que contiene la noción de implicación, favoreciéndose así el desarrollo de lógicas modales.

En cuanto al enunciado (2), si decimos que vale la verdad lógica $p \lor \neg p$, parece que hemos de admitir que *hoy* es verdadero (2) o lo es su negación y que, por tanto, el futuro está determinado ya en el presente; ningún acontecimiento podría ser, entonces, contingente. Consideraciones de este tipo, así como la existencia de enunciados que contienen términos no denotativos, han llevado a considerar la posibilidad de desarrollar lógicas con un tercer valor de verdad.

Si aplicamos $p \lor \neg p$ a (3), resulta que tanto de la afirmación de (3) como de la afirmación de su negación se sigue una contradicción. ¿Dónde puede estar el problema? Según algunos lógicos y matemáticos, en la consideración de totalidades infinitas o bien en la aplicación universal del principio del tercero excluido, o quizás en ambas cosas. Si no rechazamos la bivalencia, al menos hemos de poner bajo sospecha su aplicabilidad universal; dicho de otro modo, hemos de dudar que pueda aplicarse a cualquier enunciado p antes de que haya sido probado p o $\neg p$. Las afirmaciones de tipo (3) son la principal motivación del desarrollo de la lógica intuicionista.

El enunciado (4) es uno de esos enunciados no admisibles en lógica clásica por contener un predicado vago. ¿Podemos decir de este tipo de enunciados que son absolutamente verdaderos o absolutamente falsos? Parece que no siempre. Gödel no era absolutamente calvo, pero tampoco era absolutamente no calvo, sólo era un poco calvo. Este es un caso en el que no está claramente determinado si el objeto cae o no cae bajo el concepto. Sin embargo, también estos enunciados intervienen en argumentaciones que consideramos intuitivamente correctas por su forma. ¿No puede ser que la verdad, en ciertos contextos, admita grados? En ese caso no sólo caería la universalidad del tercero excluido, sino también la del principio de no contradicción: no sería absolutamente falso decir

que Gödel era calvo y no lo era. El interés por la estructura de las argumentaciones que contienen predicados vagos y parecen correctas, ha dado lugar al desarrollo de lógicas de la vaguedad.

1. CONDICIONAL E IMPLICACIÓN

La noción clásica de implicación permite concluir (válidamente) una afirmación cualquiera a partir de un conjunto contradictorio de premisas:

(1) $$\frac{\alpha \wedge \neg\alpha}{\beta}$$

y concluir una verdad lógica a partir de una afirmación cualquiera:

(2) $$\frac{\beta}{\alpha \vee \neg\alpha}$$

Quienes defienden que se ha de exigir relevancia de las premisas para la conclusión quieren rechazar estas implicaciones, que consideran paradójicas, pero para hacerlo necesitamos un nuevo concepto de consecuencia lógica.

Examinemos un argumento atribuido a Escoto:

1 Sócrates existe y no existe
2 Sócrates no existe
3 Sócrates existe
4 Sócrates existe o un hombre es un asno
5 Un hombre es un asno

Este argumento se sostiene en los siguientes principios difíciles de rechazar:

(I) Una conjunción implica cualquiera de sus miembros (justificación de las líneas 2 y 3 a partir de la línea 1).

(II) Un enunciado implica su disyunción con otro cualquiera (justificación de la línea 4 a partir de la línea 3).

(III) Una disyunción y la negación de un miembro implica el otro miembro (justificación de la línea 5 a partir de las líneas 2 y 4).

(IV) Principio de transitividad de la implicación (puesto que 1 implica 2 y 3, y 3 implica 4, y 2 y 4 implican 5, 1 implica 5).

Para negar la validez de las formas argumentativas (1) o (2) hay que rechazar alguno de esos principios. Los defensores de la relevancia rechazan (III) y exigen para todas las secuencias básicas una conexión entre los significados del conjunto de las premisas y la conclusión, con lo cual impiden que el paso desde una disyunción y la negación de uno de sus miembros a la afirmación del otro miembro no se pueda dar con generalidad. Anderson y Belnap han desarrollado un cálculo de la relevancia que no permite la aplicación universal del silogismo disyuntivo y evitan los teoremas de la lógica clásica en los que entre el antecedente y el consecuente no hay ningún miembro en común. No vamos a hacer ahora una filosofía (ni siquiera una introducción) de la lógica de la relevancia. Sólo quiero señalar el contexto en el que comienzan a desarrollarse también los cálculos modales.

C. I. Lewis propuso introducir un nuevo símbolo ($\prec$) para expresar la implicación estricta, con la intención de evitar las llamadas paradojas de la implicación clásica, que define así:

$$\alpha \prec \beta = \text{df. } \neg \Diamond (\alpha \wedge \neg\beta)$$

La cuestión es cómo interpretar esa posibilidad. En principio podemos pensar que se trata de nuestra definición clásica de la relación de consecuencia semántica: bajo ninguna interpretación resulta verdadero el antecedente y falso el consecuente. Pero, como muy bien explica Quesada[35], examinándolo un poco más de cerca observamos que no es así. Nuestro símbolo metalingüístico para la consecuencia semántica ($\vDash$) no puede ser reiterado, mientras que el símbolo que propone Lewis es adecuado como operador del lenguaje fórmula: puede figurar más de una vez, y no necesariamente como operador principal, en una fórmula. Así, por ejemplo, una expresión como

$$p \vDash (p \vDash (q \vDash p))$$

no es una expresión bien formada ni del lenguaje fórmula ni del metalenguaje, pero

$$p \prec (p \prec (q \prec p))$$

en el nuevo lenguaje que está proponiendo Lewis sí sería una fórmula bien formada, que significa lo mismo que

$$\neg \Diamond (p \wedge \neg\neg \Diamond (p \wedge \neg\neg \Diamond (q \wedge \neg p)))$$

El error de Lewis es que quiso que su nuevo símbolo, con el significado definido arriba, pudiera usarse tanto como sustituto del signo metalin-

[35] Cfr. QUESADA, D. (1985): 57ss.

güístico clásico para la consecuencia semántica como del signo clásico para el condicional. Naturalmente ningún signo se puede proponer como sustituto adecuado de dos signos que pertenecen a niveles lingüísticos diferentes. En este sentido dice Quine que la lógica modal fue concebida en pecado.

2. LÓGICA MODAL CLÁSICA

La lógica modal se desarrolla a partir de dos motivaciones diferentes:

1) La lógica clásica de primer orden no tiene capacidad para explicar algunos argumentos intuitivamente válidos y cuya validez parece deberse al uso de operadores modales.
2) Como acabamos de ver, la relación de implicación entre el conjunto de premisas y la conclusión de un argumento válido, así como el carácter tautológico de algunas fórmulas, la explicamos haciendo uso de la noción de posibilidad o la de necesidad, decimos que una fórmula β se sigue *necesariamente* de un conjunto de fórmulas Γ, o bien que no es *posible* que el antecedente sea verdadero y el consecuente falso.

Tiene sentido tratar de formalizar este tipo de afirmaciones que hacemos desde la propia lógica y proporcionar reglas para su uso dentro de un cálculo de consecuencias.

En el lenguaje natural utilizamos las nociones de posibilidad y necesidad como operadores aplicados a enunciados: “Es necesario / posible que *p*”. Sin embargo no se comportan como el otro operador monádico que ya conocemos, la negación, en relación con la adscripción de un valor de verdad al enunciado. La negación de una afirmación coincide con la afirmación de su negación. En el supuesto de que aceptemos la bivalencia y exijamos que todos los nombres que utilicemos tengan referencia, afirmar que no es verdad que *p* equivale a afirmar que es verdad que no-*p*. En cambio, bajo los mismos supuestos, afirmar que no es necesario que *p* no equivale a afirmar que es necesario que no-*p*.

Estos operadores se comportan de un modo similar a los operadores epistémicos, como “creer”: componen enunciados no veritativo-funcionales. Al aplicarlos a un enunciado no los aplicamos a su valor de verdad, sino al pensamiento o proposición que expresan.

Si ampliamos el lenguaje lógico con estos dos operadores obtenemos más verdades lógicas y podemos convalidar nuevos argumentos.

Los sistemas modales clásicos, *T*, *S*4 y *S*5, se construyen a partir de lo siguiente:

(1) Definiciones:

$\Box\, \alpha = \text{df} \neg \Diamond \neg \alpha$

$\Diamond\, \alpha = \text{df} \neg \Box \neg \alpha$

(2) Axiomas de la lógica clásica:

$A1 \quad (p \vee p) \rightarrow p$

$A2 \quad q \rightarrow (p \vee q)$

$A3 \quad (p \vee q) \rightarrow (q \vee p)$

$A4 \quad (q \rightarrow r) \rightarrow ((p \vee q) \rightarrow (p \vee r)$

(3) Reglas de transformación de la lógica clásica:

*R*1 Sustitución uniforme

*R*2 Modus Ponens

Sistema *T*:

$A1$ - $A4$

$A5 \quad \Box\, p \rightarrow p$

$A6 \quad \Box\, (p \rightarrow q) \rightarrow (\Box\, p \rightarrow \Box\, q)$

$R1$ - $R2$

$R3$ Necesidad: $\dfrac{\vdash \alpha}{\vdash \Box\, \alpha}$

Sistema *S*4:

T

$A7 \quad \Box\, p \rightarrow \Box\, \Box\, p$

Sistema *S*5:

T

$A8 \quad \Diamond\, p \rightarrow \Box\, \Diamond\, p$

A estos sistemas podemos añadir también el de Brouwer:

Sistema *B*:

T

$A9 \quad p \rightarrow \Diamond\, p$

La regla 3 y el axioma 9 añadido por Brouwer, las podemos leer respectivamente así:

(1) si algo es una verdad lógica, entonces es una verdad necesaria

(2) si algo es verdadero, entonces es posible

Con esto no se está definiendo una noción de consecuencia rival de la consecuencia lógica clásica. La lógica modal proposicional se puede ver como una extensión conservadora de la lógica proposicional clásica. Ahora bien ¿cómo interpretamos las nociones modales y qué noción de verdad es la más adecuada en un cálculo modal?, ¿qué interpretación damos a los dos nuevos operadores? Al afirmar p como posible ($\Diamond p$) ¿queremos decir que no sabemos si es verdadero p o lo es $\neg p$?, ¿queremos decir que p no es una contradicción?, ¿queremos decir que relativamente a un estado de cosas, p sería o es verdadero?, ¿queremos decir que p es de hecho falso, pero no necesariamente falso? Pero ¿qué significa aquí "necesariamente"?, ¿es una necesidad lógica o una empírica? Una teoría del significado de los operadores modales no es independiente de la teoría de la verdad que estemos dispuestos a defender.

Kripke ha propuesto una semántica para lógicas modales que está basada en la teoría de la verdad tarskiana: "$\Diamond p$" significa que p es verdadero en algún mundo posible (M). Como vemos, utilizamos la noción de posibilidad para describir la aplicación del operador de posibilidad a p.

También podríamos decir que "$\Diamond p$" significa que existe un mundo M donde p es verdadero, lo cual se aproxima más a la noción de verdadero en una interpretación I. Pero ¿de qué *existencia* estamos hablando?

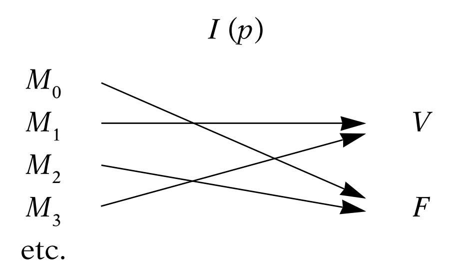
Kripke insiste en que sería un error entender la noción que él está introduciendo de mundo posible como si hubiera otros mundos, además del nuestro, el actual, y pudiéramos observar y describir qué cosas hay en ellos. El único mundo que existe es el que tenemos (dejando ahora aparte la cuestión acerca de *cómo* es el mundo), pero podemos concebir situaciones contrafácticas: "Si Frege hubiera escrito *Die Grundlagen der Arithmetik* en inglés, ahora sería mejor conocida su propuesta semántica", "Si el Partido Popular no hubiera ganado las elecciones generales de 2000, Aznar no se habría reunido con Bush en las Azores". Una situación contrafáctica es un mundo posible. O también podemos decir: un mundo posible kripkeano no es sino una situación contrafáctica, es decir, se construye desde lo que es y lo que no es el caso en el mundo actual.

La evaluación semántica de los enunciados modales se hace por referencia a un conjunto de mundos posibles en un modelo U. Un modelo es un conjunto no vacío de mundos posibles, entre los cuales figura el mundo actual, y una función de interpretación (I) diádica, cuyos argumentos

son pares ordenados <mundo, enunciado> y cuyo valor es un elemento del conjunto {*V*, *F*}.

Intuitivamente podríamos representarlo así:

Modelo *U*:



La situación descrita en este modelo es $\neg p \wedge \Diamond p$, es decir, es falso *p* en el mundo actual (M_0), pero no necesariamente falso: $\neg \Box \neg p$ (*p* no es falso en todo mundo posible).

Las condiciones de verdad quedan fijadas por las siguientes definiciones:

(1) α es verdadera en un mundo M_n de un modelo *U* si y sólo si *I* asigna el valor "verdadero" a α en el mundo M_n del modelo *U*.

(2) $\neg\alpha$ es verdadera en M_n de *U* si y sólo si α es falsa en M_n de *U*.

(3) $\alpha \vee \beta$ es verdadera en M_n de *U* si y sólo si α es verdadera en M_n de *U* o β es verdadera en M_n de *U*.

(4) $\alpha \wedge \beta$ es verdadera en M_n de *U* si y sólo si α es verdadera en M_n de *U* y β es verdadera en M_n de *U*.

(5) $\alpha \rightarrow \beta$ es verdadera en M_n de *U* si y sólo si α es falsa en M_n de *U* o β es verdadera en M_n de *U*.

(6) $\Diamond\, \alpha$ es verdadera en M_n de *U* si y sólo si hay un mundo *M'* de *U* tal que α es verdadera en *M'*.

(7) $\Box\, \alpha$ es verdadera en M_n de *U* si y sólo si α es verdadera en todo *M* de *U*.

El problema de aplicar modalidades al lenguaje clásico de primer orden es cómo identificar los objetos y propiedades en cada mundo posible. ¿Ha de ser el dominio de objetos el mismo para todos los mundos posibles?, ¿se aceptan objetos posibles que no existen en M_0?, ¿qué significa "posibilidad" aplicada a un objeto?

Barcan ha enunciado dos verdades para el caso de que los únicos objetos existentes en cada mundo posible sean los objetos actuales, es decir, cuando el dominio de todo M es el dominio de M_0:

(1) $\Diamond \exists x \, Fx \rightarrow \exists x \Diamond Fx$

(2) $\forall x \Box Fx \rightarrow \Box \forall x \, Fx$

Si aceptamos dominios distintos en mundos distintos, incluso dominios con objetos que no existen en M_0, aparece el problema de la existencia de términos singulares que no hacen referencia a ningún objeto en M_0. ¿Qué hacemos con los enunciados en los que figuran ese tipo de términos? Podemos dar al menos seis respuestas distintas no excluyentes:

(1) Los términos que no denotan ningún objeto en el mundo actual también tienen referencia: denotan objetos posibles no reales.

(2) La referencia no se identifica con las entidades individuales. No toda referencia de un nombre propio es una entidad espacio-temporal, también hacemos referencia a números, por ejemplo; una referencia es antes que nada una noción semántica.

(3) Los enunciados que contienen términos singulares que no denotan ningún objeto del mundo actual, son enunciados que no tienen valor de verdad.

(4) Ese tipo de enunciados tienen un valor de verdad indeterminado o sólo posible.

(5) Siempre podemos evitar el uso de nombres propios no referenciales, reduciéndolos a descripciones definidas e interpretando éstas como hizo Russell.

(6) Las variables cuantificadas están ligadas a los mundos posibles, designan entidades del dominio específico de cada mundo posible.

Pero si tenemos que aceptar la existencia de individuos y propiedades que sólo son posibles, que no tienen existencia real, ¿cómo podemos identificarlas?

Se ha escrito mucho sobre el problema de la identificación de objetos a través de los mundos posibles. Por limitaciones de espacio, no podemos discutir aquí detenidamente esta cuestión. Linsky trata de elaborar una teoría sobre propiedades esenciales individuales, tropezando con grandes dificultades; D. Lewis rechaza la posibilidad de hablar de *el mismo* individuo en distintos mundos y desarrolla una *teoría de las contrapartidas*, pero Kripke rechaza enérgicamente esta idea, pues un mundo posible no

es sino una situación contrafáctica, cuando queremos hablar acerca de lo que habría pasado con Aznar y con Bush en una situación que no es el caso, pero tampoco es imposible, no tratamos de buscar en esa situación posible un par de individuos que se parezcan muchísimo a Aznar y a Bush y que podamos tomar como sus contrapartidas en esa situación M_i.

El problema de la identificación de objetos y propiedades no aparece como nuevo en los contextos modales, sino que lo tenemos ya en los contextos que son claramente extensionales. Quine asegura que tenemos criterios de identificación de los objetos de M_0: materialidad, continuidad espacio-temporal, etc. Kripke también termina admitiendo la distinción entre propiedades esenciales o necesarias y propiedades accidentales o contingentes de las cosas, lo cual se puede ver como un problema para su teoría de la designación rígida, que dice que hay nombres propios que no abrevian ninguna descripción ni connotan, por tanto, ninguna propiedad del objeto denotado. Planteadas así las cosas, la lógica no tiene mucho que decir al respecto, si acaso puede contribuir a precisar las preguntas, pero no a responderlas. No es desde la lógica desde donde se puede determinar si hay o no propiedades esenciales, si hay o no objetos o propiedades sólo posibles, no existentes en M_0, cuáles son los criterios para la identificación de objetos en M_0 o en cualquier otro mundo, etc.

La salida que considero más adecuada en el contexto de la lógica es la que da Føllesdal: todas las constantes individuales utilizadas en el cálculo son referenciales por definición y designan los mismos objetos en todo mundo.

3. LÓGICAS TRIVALENTES

La consideración de los futuros contingentes ha provocado desde antiguo grandes discusiones sobre la bivalencia y es el principal motivo que lleva a Łukasiewicz a considerar en la definición de las constantes lógicas un tercer valor de verdad: lo indeterminado, lo no imposible. Con ello quiere escapar al determinismo, que no se pueda probar una afirmación sobre hechos que son posibles, pero no necesarios. Sus definiciones son las siguientes:

	$\neg$
V	F
I	I
F	V

$\wedge$	V	I	F
V	V	I	F
I	I	I	F
F	F	F	F

$\vee$	V	I	F
V	V	V	V
I	V	I	I
F	V	I	F

$\rightarrow$	V	I	F
V	V	I	F
I	V	V	I
F	V	V	V

El resultado de estas definiciones es que las fórmulas de tipo $\alpha \to \beta$ ya no son equivalentes a las de tipo $\neg\alpha \vee \beta$ ni a las de tipo $\neg (\alpha \wedge \neg\beta)$. No resultan válidas todas las fórmulas de tipo $\alpha \vee \neg\alpha$ ni todas las de tipo $\neg (\alpha \wedge \neg\alpha)$, aunque sí es válida la identidad: $\alpha \to \alpha$.

Kleene también quiere eliminar del conjunto de verdades lógicas el principio del tercero excluido, no tanto por el problema del determinismo, sino por un problema de decisión: allí donde se puede probar la verdad de α o la verdad de β, podemos afirmar la verdad de $\alpha \vee \beta$; si podemos refutar ambos miembros, podemos afirmar la falsedad de su disyunción, pero el resto de los casos son indecidibles. Decir que una fórmula tiene un valor indecidible, no es afirmar que no es verdadera ni falsa, ni afirmar que tiene un valor intermedio entre lo verdadero y lo falso, es decir que mientras no la hayamos probado o refutado no tenemos ninguna justificación para afirmarla ni para negarla. Las definiciones de las constantes proposicionales que da, coinciden todas con las de Łukasiewicz excepto la del condicional:

	¬
V	*F*
I	*I*
F	*V*

∧	*V*	*I*	*F*
V	*V*	*I*	*F*
I	*I*	*I*	*F*
F	*F*	*F*	*F*

∨	*V*	*I*	*F*
V	*V*	*V*	*V*
I	*V*	*I*	*I*
F	*V*	*I*	*F*

→	*V*	*I*	*F*
V	*V*	*I*	*F*
I	*V*	*I*	*I*
F	*V*	*V*	*V*

Con esto recupera la equivalencia entre $\alpha \to \beta$, $\neg\alpha \vee \beta$ y $\neg (\alpha \wedge \neg\beta)$, pero ninguna de las fórmulas de tipo $\alpha \to \alpha$, $\neg\alpha \vee \alpha$ o $\neg (\alpha \wedge \neg\alpha)$ es una verdad lógica. No sólo cae el principio del tercero excluido y el de no contradicción, sino también el de identidad.

Bochvar busca más bien condiciones de afirmabilidad que contemplen la posibilidad de enunciados que no son ni verdaderos ni falsos por ser asignificativos, que es lo que ocurre, según él, con las paradojas semánticas, y propone otras condiciones de verdad:

	¬
V	*F*
I	*I*
F	*V*

∧	*V*	*I*	*F*
V	*V*	*I*	*F*
I	*I*	*I*	*I*
F	*F*	*I*	*F*

∨	*V*	*I*	*F*
V	*V*	*I*	*V*
I	*I*	*I*	*I*
F	*V*	*I*	*F*

→	*V*	*I*	*F*
V	*V*	*I*	*F*
I	*I*	*I*	*I*
F	*V*	*I*	*V*

Todas las fórmulas que contienen alguna subfórmula con valor *I*, tienen como valor *I*, de modo que según estas definiciones no encontraremos *ninguna* fórmula válida. Un enunciado que tenga un enunciado

componente asignificativo, será así mismo asignificativo, aun cuando, por ejemplo, su forma sea la de la identidad. El carácter paradójico de un componente "contamina" todo el compuesto. Las relaciones de equivalencia que quedan definidas son las mismas que en Kleene: $\alpha \rightarrow \beta$, $\neg\alpha \vee \beta$ y $\neg (\alpha \wedge \neg\beta)$ tienen siempre los mismos valores para los mismos argumentos.

Ulrich Blau se interesa también por los sistemas trivalentes, pero lo que quiere es proporcionar las condiciones de verdad de aquellos enunciados que contienen términos no referenciales y no son, por ello, ni verdaderos ni falsos, pero pueden formar parte de enunciados que sí son verdaderos o falsos. Él y otros autores subrayan el hecho de que tenemos *dos* modos de decir que un enunciado no es verdadero:

(1) queriendo decir que no tiene valor de verdad, o

(2) queriendo decir que es falso.

Bochvar introduce el operador de afirmación (que vamos a simbolizar así: |) y proporciona para él una definición semántica:

	|
V	*V*
I	*F*
V	*F*

Esta aserción la podemos leer como "es verdadero que ...". Con esto, aunque un enunciado no tenga valor de verdad, podemos hacer una afirmación sobre él que no queda "contaminada" por ese hecho, sino que tiene un valor de verdad determinado del conjunto $\{V, F\}$. Ahora estamos en mejores condiciones para poder distinguir la negación interna en un enunciado de la negación externa de su verdad. Así, por ejemplo, podemos distinguir:

	valor
(1) El actual rey de Francia es poeta	*I*
(2) El actual rey de Francia *no* es poeta	*I*
(3) *No* es verdad que el actual rey de Francia es poeta	*V*

El tercero excluido vale para la aserción y su negación: "es verdad que... o no es verdad que...".

Esto concuerda muy bien con la idea fregeana de que la existencia de la referencia de un nombre está presupuesta y no afirmada, como sos-

tiene Russell: "que el nombre «Kepler» designa algo es (...) presuposición tanto de la afirmación «Kepler murió en la miseria» como de la opuesta"[36]. Un enunciado como "El actual rey de Francia es sabio y el actual rey de Francia no es sabio", es una contradicción según el análisis de Russell, pero si decimos que los enunciados componentes no son ni verdaderos ni falsos, por contener descripciones definidas no denotativas, el valor de verdad del enunciado compuesto dependerá de cómo se definan la negación y la conjunción en una lógica trivalente. Frege está interesado en desarrollar una lógica para los enunciados que tienen un valor de verdad determinado, por eso no consideró la posibilidad de diseñar una lógica trivalente.

Si prescindimos del principio del tercero excluido, podemos construir sistemas que son consistentes. A partir de esto se vienen proponiendo una gran variedad de lógicas polivalentes, incluidos sistemas con infinitos valores de verdad; unos se presentan como extensiones de la lógica clásica y otros quieren ser revisiones de la clásica, como es el caso de la lógica de la vaguedad.

4. LÓGICA INTUICIONISTA

El intuicionista, sin apostar claramente por un sistema trivalente, desea distinguir las aserciones de los valores de verdad que pudieran tener los enunciados afirmables, y se interesa por un cálculo que no tenga que sujetarse al principio de bivalencia y en el que, por tanto, no pueda probarse el principio del tercero excluido en la forma general: $\alpha \vee \neg \alpha$; sustituye la noción lógica de verdad por la de construible o demostrable. No trata de fijar condiciones de verdad, sino condiciones de afirmabilidad. De los enunciados con la forma $\alpha \vee \neg \alpha$ sólo se aceptan como verdaderos aquellos en los que se ha demostrado α o $\neg \alpha$.

Para que el tercero excluido no cuente como teorema hemos de modificar el significado de la negación clásica. Si una fórmula cualquiera no es verdadera o falsa, sino afirmable o no afirmable como verdadera, no podemos concluir de la no afirmabilidad de $\neg\alpha$ la afirmabilidad de α. Por eso tampoco es un modelo de derivación correcta:

$$(1) \qquad \frac{\Gamma \vdash \neg\neg\alpha}{\Gamma \vdash \alpha}$$

[36] FREGE (1984a): 69.

Una demostración de $\neg\neg\alpha$ no se puede transformar con generalidad en una demostración de α. El significado de $\neg\alpha$ ya no incluye que del supuesto de que $\neg\neg\alpha$ es verdadera se sigue una contradicción. En cambio, si del supuesto de que α es verdadera se sigue una contradicción, sí estamos justificados para afirmar $\neg\alpha$. Propiamente la regla que el intuicionista no acepta no es la que permite eliminar una doble negación, esa es una consecuencia del cambio de significado que introduce en la negación.

Habitualmente se presenta como regla básica de eliminación de la negación en lógica clásica bivalente una regla que nos autoriza a eliminar *dos* constantes *a la vez*. Sin embargo (1) es una regla derivada. Las reglas básicas señalan cómo podemos construir una fórmula cuyo signo lógico principal es el operador * (regla de introducción de *) y qué podemos extraer de una fórmula cuyo signo lógico principal es *, es decir, cómo podemos eliminar el signo lógico principal de una fórmula (regla de eliminación de *).

Pero el signo lógico principal de una fórmula es siempre una única constante lógica. Así, el signo lógico principal de una fórmula de tipo $\neg\neg\alpha$ es la primera de las negaciones.

Todas las reglas que permiten eliminar o introducir varias constantes a la vez deben entenderse como abreviaturas de deducciones más largas en las que únicamente se utilizan reglas básicas. La regla básica para la eliminación de *una* negación en una lógica clásica tiene la siguiente forma:

$$\frac{\Gamma, \neg\alpha \vdash \beta \qquad \Gamma, \neg\alpha \vdash \neg\beta}{\Gamma \vdash \alpha}$$

Al negar esta regla, en un sistema intuicionista podremos eliminar dos negaciones a la vez en algunas ocasiones, pero en otras no. Es decir, no podemos eliminar la doble negación *con generalidad*. Por ejemplo $\neg\neg\neg\alpha \rightarrow \neg\alpha$ es un teorema intuicionista. Esto es posible porque el consecuente tiene como signo lógico principal una negación, que podemos introducir, pero no eliminar en el cálculo. A partir de $\neg\neg\neg\alpha$ podemos suponer α y obtener $\neg\neg\alpha$, que entra en contradicción con $\neg\neg\neg\alpha$; esta contradicción nos permite eliminar el supuesto (α) afirmando su negación: $\neg\alpha$. Pero $\neg\neg\alpha \rightarrow \alpha$ no se puede probar, pues a partir de $\neg\neg\alpha$ y del supuesto $\neg\alpha$ podemos obtener una contradicción, pero lo único que esto no autoriza es afirmar de nuevo $\neg\neg\alpha$.

También se deriva del nuevo significado de la negación el que no se pueda probar en el sistema intuicionista el tercero excluido. El intuicionismo no es un rechazo directo ni del tercero excluido ni de la equivalencia entre $\neg\neg\alpha$ y α . Estas son consecuencias de la no utilización de la regla clásica de eliminación de *una* negación. Y este rechazo obedece directamente a la teoría de la verdad en la que se quiere reducir lo verdadero a lo afirmable. La negación no se comporta del mismo modo en relación con lo verdadero que en relación con lo afirmable. En contextos no vagos y sin términos no referenciales, y con una noción transcendente de verdad, del hecho de que α no es verdadero, se sigue que es verdadero $\neg\alpha$, pero si rechazamos esa noción de verdad y nos limitamos a afirmar sólo lo que podemos probar como verdadero, del hecho de que no podamos afirmar α (no tenemos una prueba de α) no se sigue que podemos afirmar $\neg\alpha$ (tenemos una prueba de $\neg\alpha$).

Cuando se dice que el intuicionista rechaza la prueba por reducción al absurdo, no es del todo correcto: esta prueba se puede utilizar para negar el supuesto del que se deriva una contradicción, lo que no podemos hacer es eliminar la negación cuando es el signo principal del supuesto. $\neg\alpha$ ya no significa simplemente que α es falso, sino que es absurdo: $\alpha \rightarrow \bot$. Si no podemos demostrar ni α ni $\neg\alpha$, no tenemos justificación para afirmar $\alpha \vee \neg\alpha$.

La bivalencia de la lógica clásica se refleja en la definición de la negación, tanto su definición semántica como su definición sintáctica señalan el hecho de que podemos afirmar α cuando $\neg\alpha$ es falsa y podemos afirmar $\neg\alpha$ cuando α es falsa. La bivalencia se presenta simplemente al definir que α es verdadera si y sólo si α no es falsa.

El intuicionismo tampoco es un rechazo fuerte y directo de la bivalencia; en el caso de que α tenga un valor de verdad, ese valor es lo verdadero o lo falso, no hay una tercera posibilidad, pero esta afirmación que acabamos de hacer es una afirmación condicionada: hasta que no tengamos una prueba de la verdad de α o una prueba de la verdad de $\neg\alpha$, ni siquiera sabemos si α tiene algún valor de verdad. Lo que sí se rechaza es que el principio del tercero excluido sea un principio, es decir que pueda probarse en todos los casos que tenemos justificación para afirmar α o $\neg\alpha$. El motivo por el que el intuicionista no quiere apoyarse en el tercero excluido es su rechazo de los infinitos actuales. El tercero excluido, aplicado a la lógica de primer orden, dice que dado un predicado P, para todo objeto se cumple que es P o no lo es y eso significa que el objeto cae bajo P o bajo $\neg P$, una tercera posibilidad está excluida. Esto es, según el intuicionista, llevar la bivalencia demasiado lejos. El intuicionista quiere ver

qué podemos construir sin utilizar ese principio. Naturalmente no se trata meramente de una curiosidad. Su fundador, Brouwer, creyó que el razonamiento matemático no era un razonamiento lógico, en el sentido de la lógica clásica, y trató de mostrar cómo discurren los razonamientos matemáticos. No acepta el infinito actual ni el que una proposición ha de ser verdadera o falsa antes de haber proporcionado una prueba o una refutación de ella. Por eso sus críticas se dirigen contra la aplicación de la lógica clásica a totalidades infinitas.

No se trata de que niegue el principio del tercero excluido y la eliminación de la doble negación, sino de no apoyar el razonamiento en el supuesto de la bivalencia y no utilizar, por tanto, el principio del tercero excluido, pues su aplicación no puede ser universal; en particular no está justificada su aplicación a conjuntos infinitos. No podemos obtener en este cálculo cualquier fórmula con la forma $(\alpha \vee \neg\alpha)$, pero sí podemos obtener $\neg\neg(\alpha \vee \neg\alpha)$ y $\alpha \rightarrow \neg\neg\alpha$. Una fórmula de tipo $\neg\alpha$ no significa que su negación $(\neg\neg\alpha)$ es un absurdo, sino únicamente que es un absurdo α: si afirmamos α caemos en contradicción. Si a partir de la negación de una fórmula cualquiera obtenemos una contradicción, esto no nos autoriza a afirmar dicha fórmula sin negación, sino únicamente a afirmar la absurdidad de la fórmula negada, introduciendo sobre ella una nueva negación.

Dos negaciones se pueden cancelar con generalidad *hasta alcanzar* $\neg\alpha$, pero no hasta alcanzar α. En realidad lo que se rechaza es la idea de un infinito actual y, por eso, la aplicación del tercero excluido se ha de restringir a los dominios finitos. En un infinito potencial no podemos estar seguros, con generalidad, de que encontraremos una prueba o una refutación de α.

En la lógica intuicionista clásica (no así en la minimalista) vale el principio *ex contradictione quodlibet*: $\bot \rightarrow \alpha$, pero tampoco con esto solo tenemos medios para eliminar *una* sola negación. Y es porque la equivalencia $\neg\alpha \equiv \alpha \rightarrow \bot$ no presupone bivalencia y no significa lo mismo que la equivalencia clásica $\alpha \equiv \neg\alpha \rightarrow \bot$, que no puede establecerse en el sistema intuicionista.

En lógica de primer orden, entonces, tenemos que rechazar $\neg\forall x\, Fx \rightarrow \exists x\, \neg Fx$, pero es válida la inversa: $\exists x\, \neg Fx \rightarrow \neg\forall x\, Fx$.

El significado de las conectivas proposicionales y los cuantificadores viene dado por las siguientes reglas:

$\neg\alpha$ Se ha probado que todo intento de demostración de α se transforma en una contradicción.

$\alpha \wedge \beta$ Ambas proposiciones (α y β) han sido probadas.

$\alpha \vee \beta$ Al menos una de las dos proposiciones (α o β) ha sido probada.

$\alpha \to \beta$ Existe una construcción *C* en la cual se ha probado que toda prueba de α, se puede transformar en una prueba de β.

$\exists x\ Px$ Se ha construido una secuencia de objetos y se ha probado que satisface *P*.

$\forall x\ Px$ Se tiene una prueba de que toda secuencia de objetos satisface *P*.

En los contextos no vagos, parece que las condiciones de verdad van ligadas a los principios de identidad, no contradicción y tercero excluido, en cambio las condiciones de la afirmación no. Dado un pensamiento cualquiera, con independencia del lenguaje natural en el que venga expresado, del sujeto que lo afirma y del contexto de su emisión, podemos decir que es verdadero ese pensamiento o es verdadero que es falso. Pero si estamos hablando de afirmaciones, no podemos apoyarnos en el principio del tercero excluido para sostener que un sujeto cualquiera ha de afirmar α o afirmar $\neg\alpha$. Los intuicionistas rechazan ese principio y tienen razón al hacerlo, pues decimos que tenemos razones para afirmar tal o cual cosa a partir de un conjunto *limitado* de conocimientos o creencias.

Por otra parte, el intuicionismo no se presenta como una mera revisión de la lógica clásica, sino como una lógica rival de la lógica clásica. Es anti-realista en el sentido de que no acepta la existencia de enunciados verdaderos antes de haberlos probado; “ser verdadero” no significa sino “estar verificado”. Claro que a veces parece como si el intuicionista estuviera defendiendo la idea de que en el sistema de conocimientos poseído por un ser omnisciente tendría lugar la convergencia entre el ser verdadero y el tener razones para la afirmación, las leyes de lo afirmable coincidirían, en esa situación ideal, con las de la verdad.

Dummett opone al realismo de la lógica clásica, tal y como él lo interpreta (bivalencia, transcendencia de la verdad y composicionalidad del significado), un antirrealismo que caracteriza como holismo semántico: los enunciados no tienen un significado aislado, fuera o independiente del lenguaje tomado como un todo. El holismo refuerza la idea de que las constantes lógicas quedan definidas al proporcionar sus reglas de uso, así como la idea de que la conclusión de un argumento lógicamente correcto no significa nada fuera del contexto de la prueba.

5. LÓGICA DE LA VAGUEDAD

En la lógica clásica se excluyen tanto los nombres de conceptos vagos como los términos vacíos o sin referencia, ya que entran en conflicto con la bivalencia. Un defensor de la lógica clásica no dice que todo enunciado es verdadero o falso y no cabe ninguna otra posibilidad, sino más bien que los enunciados que no cumplan con esa condición, no son aptos para el cálculo lógico de consecuencias. Así, exige que los nombres propios (constantes individuales y descripciones definidas) denoten un único objeto y que los nombres de predicados no sean nombres de predicados vagos, sino que tengan bien definida su extensión.

El uso de enunciados que contienen predicados precisos va unido a un uso del "sí" y el "no", de un modo absoluto. El concepto preciso no sólo señala qué cae bajo él, sino también qué queda fuera de él. Si decimos que un objeto tiene la propiedad *P* e inmediatamente decimos que no es *P*, no podemos dar a entender nada, ponemos un objeto en la extensión de un concepto e inmediatamente lo retiramos. Podríamos decir que esa es una jugada ilícita en esos contextos.

Sin embargo también hay conceptos que no delimitan claramente lo que cae bajo ellos. El ejemplo clásico es el de *rojo*, ¿qué pasa con un objeto rojo sólo en parte?, ¿qué con los que tienen un tono entre rojo y violeta? Si no queremos caer en contradicción, hemos de precisar hasta qué punto es rojo y dónde o en qué sentido no lo es. Si decimos de algo que es rojo y no es rojo de un modo absoluto, no estamos diciendo nada, debemos precisar en qué sentido *sí* lo es y en que sentido *no* lo es.

A veces se dan argumentaciones falaces como justificación para rechazar el principio de contradicción. Por ejemplo, se dice que el concepto *esférico* no cae bajo el concepto *sólido* y, sin embargo, un objeto esférico también puede ser sólido. Esto es confundir los dos niveles a los que pertenecen el *caer bajo* (pertenencia) y la *subsunción* (inclusión): un objeto *cae bajo* un concepto de primer nivel, pero un concepto puede estar *subsumido* o no en otro concepto (ambos del mismo nivel), por ejemplo, el concepto *esférico* no está incluido en el de *sólido*: no todo objeto esférico es un objeto sólido, pero algunos de los objetos que caen bajo *esférico* puede ser que también caigan bajo el concepto *sólido*; los conceptos *esférico* y *sólido* tienen intersección no vacía.

Decimos que un enunciado es vago cuando no podemos atribuirle como valor la verdad ni la falsedad, es decir, no se adecúa al principio de bivalencia, no es ni verdadero ni falso *de un modo absoluto*. Una expre-

sión del lenguaje es vaga cuando, compuesta con otras expresiones, da lugar a enunciados vagos.

Si se entiende por enunciado vago cualquier enunciado que no tenga condiciones claras de verdad extensionales, son muy variados los casos que se pueden presentar:

1) Todos los contextos intensionales producen ese tipo de vaguedad (por ejemplo, los modales y los de creencia). Sin embargo tenemos sistemas lógicos adecuados para hacer cálculo de consecuencias con este tipo de enunciados y son bivalentes.

2) Enunciados que no son ni verdaderos ni falsos por contener términos que no denotan ningún objeto. Esta vaguedad se puede evitar bien como hizo Frege: estipulando que todos los términos del lenguaje (ideal) tienen denotación, bien como hizo Russell: transformando todo nombre propio en una descripción definida y ésta en una afirmación existencial.

3) Enunciados cuyos argumentos no son de la categoría adecuada para saturar las funciones. Por ejemplo: "La rosa es tiempo". En general son enunciados que encontramos en contextos poéticos, donde la intención no es la transmisión de información, no se tiene pretensión de verdad. Más bien se trata de una buscada indeterminación del significado.

4) Enunciados cuyo valor de verdad depende del contexto de su emisión. Esto sucede siempre que utilizamos deícticos, pero podemos reconstruir el enunciado de modo que exprese el pensamiento completo con el que fue usado el enunciado en ese contexto.

5) Paradojas semánticas debidas a la autorreferencia. Por ejemplo: "Este enunciado es falso". Este es un problema que se ha discutido mucho y para el cual no parece haber todavía una respuesta satisfactoria.

Pero cuando hablamos de enunciados vagos en esta lógica no nos estamos refiriendo a ninguno de esos casos. Los enunciados vagos que nos interesan contienen *predicados vagos*: predicados que no delimitan claramente para todo objeto, si el objeto cae o no cae bajo ese predicado. Podemos distinguir dos tipos de predicados vagos: 1) predicados como "filósofo", "humano", "artista", etc., y 2) predicados como "rojo", "grande", "calvo", "montón", etc. En el caso de los primeros, parece que podríamos precisar su significado hasta determinar claramente a qué se pueden apli-

car y a qué no. Se discute, por ejemplo, si un óvulo fecundado es un ser humano o no, pero lo que no aceptaríamos es que sea un poco humano. La respuesta para cada entidad se da en términos de “sí” o “no”. En cambio con los predicados del segundo tipo nos encontramos en una situación en la que podemos aplicar el predicado en un cierto grado, pero no absolutamente: alguien puede ser sólo un poco calvo, pero no del todo. Y ¿cómo fijamos el límite?, ¿cuántos pelos le deben faltar a uno en la cabeza para que podamos aplicarle con verdad el predicado “calvo”?, ¿podemos decir que si tuviera un pelo más, ya no sería uno de los calvos? Estos son propiamente los predicados vagos: no podemos completar su significado con el objetivo de precisar sus límites de aplicación. Tampoco nos sirve de ayuda añadir un tercer valor de verdad para los casos en los que no está claro si el objeto cae o no cae bajo el concepto, pues los grados de pertenencia recorren un continuo entre 0 y 1. El problema es que en estos contextos no podemos ya hablar en términos absolutos de “caer o no caer” bajo el concepto. Son predicados que se aplican a los objetos en un grado.

En el lenguaje de la lógica clásica se evita el uso de este tipo de conceptos, puesto que son incoherentes y pueden llevarnos a contradicciones. La lógica clásica puede incorporar conceptos vacíos y conceptos contradictorios, pero no conceptos vagos, siempre debe estar bien determinado para todo objeto, si cae o no cae bajo un concepto dado.

Sin embargo en el lenguaje natural hacemos frecuente uso de predicados vagos, incluso en argumentaciones que consideramos correctas, manejamos significados vagos y somos capaces de distinguir entre usos correctos e incorrectos. ¿No será posible explicitar las reglas del uso correcto de este tipo de predicados y elaborar una lógica útil para separar los argumentos falaces de los correctos?, ¿qué relación de consecuencia se puede definir en los contextos vagos?

Parece que fue Eubúlides de Megara quien argumentó que un grano no hace un montón, tampoco dos ni tres, y parece absurdo afirmar que hay un número *determinado* de granos a partir del cual sí podemos decir que tenemos un montón. Este argumento es paradigmático de un conjunto de argumentos cuyas premisas contienen predicados vagos y cuyos pasos inferenciales se dan de acuerdo con las reglas deductivas de la lógica clásica. Las sorites ponen de manifiesto que o bien aceptamos grados de verdad o bien caemos en contradicción. La paradoja también se presenta si pensamos el proceso inverso: si de un montón (de arena, por ejemplo) quitamos un grano, seguimos teniendo un montón, pero llegará un momento en el que de dos granos quitaremos uno y ¡segui-

remos teniendo un montón!, y si de ese montón quitamos un grano ¡seguiremos teniendo un montón! Tras un número finito de granos de arena retirados, seguimos teniendo un montón donde ya no hay nada. Este argumento tiene la siguiente forma lógica:

P_n	(n granos de arena forman un montón)
$P_n \rightarrow P_{n-1}$	(si n es un montón, n-1 es un montón)
P_{n-1}	M.P.
…	
$P_{n-(n-1)}$	M.P.
$P_{n-(n-1)} \rightarrow P_{n-n}$	(si 1 grano es un montón, 1-1 es un montón)
P_{n-n}	M.P.

En general, los predicados vagos tienen la característica de que pequeñas variaciones en un objeto no impide que podamos seguir aplicándole el predicado, sin embargo la variación no se puede reiterar indefinidamente sin pérdida de verdad.

Tras el desarrollo de la informática se ha visto la posibilidad y la conveniencia de desarrollar procedimientos para manejar información vaga o borrosa. Lofti Zadeh[37] ha propuesto una lógica para examinar la bondad de los argumentos que contienen predicados vagos: la lógica difusa o borrosa o de grados de verdad o, como preferimos llamarla, lógica de la vaguedad. Según Zadeh la dicotomía verdadero / falso es tan confusa como la dicotomía blanco / negro: hay muchos grises entre el blanco y el negro, como hay muchos grados de verdad entre lo absolutamente verdadero y lo absolutamente falso. Lo verdadero y lo falso funcionan la mayor parte de las veces como límites, lo que en realidad tenemos son distintos grados de aproximación a la verdad.

Por ejemplo, podríamos decir que "40.000 granos de arena forman un montón de arena" es un enunciado con un grado de verdad de 0,999999, mientras que el enunciado "un grano de arena forma un montón de arena" podemos pensarlo como teniendo un grado de verdad de 0,000001. Aplicada esta idea al sorites, en cada aplicación del Modus Ponens tendríamos un variación de grado de verdad mínima, pero suficiente para que, después de un número finito de pasos, el enunciado obtenido tenga un grado de verdad muy próximo a 0. Pasamos de lo prácticamente ver-

[37] ZADEH, L. A. (1965): "Fuzzy Sets", *Information and Control* **8**: 338-53, y Zadeh, L. A. (1975): "Fuzzy Logic and approximate Reasoning", *Synthese* **30**: 407-28.

dadero a lo prácticamente falso. Una acumulación de pequeñas diferencias puede dar lugar a grandes diferencias.

¿Podemos señalar el límite donde un predicado P todavía es aplicable a un objeto y en una mínima variación posterior del objeto ya no lo es? Este modo de plantear la cuestión es una insistencia en no querer admitir la idea de que la verdad pueda tener grados. Hay un *continuo*, entre 0 y 1, de grados de verdad, no existe ningún punto a partir del cual podamos decir que el predicado vago deja de aplicarse con verdad. Cualesquiera dos enunciados vagos muy próximos entre sí, tienen aproximadamente el mismo grado de verdad: los dos son prácticamente verdaderos (1) o prácticamente falsos (0), o los dos tienen un grado muy próximo a cualquier otro valor entre 0 y 1.

Así como en la lógica trivalente hemos redefinido las constantes proposicionales de modo que la función no se aplique sobre el conjunto {*V*, *F*}, sino sobre el conjunto {*V*, *I*, *F*}, ahora podemos seguir la misma estrategia para elaborar la semántica de este nuevo cálculo, teniendo en cuenta que en él tampoco tenemos un tercer valor que sea exactamente un valor intermedio entre lo verdadero y lo falso, sino un continuo de grados de verdad. No obstante, para simplificar las cosas y hacerlo más intuitivo, podemos limitarnos aquí a la consideración de cuatro grados de verdad, por ejemplo, {1, 0.7, 0.3, 0}. Las constantes proposicionales tendrían entonces el siguiente significado semántico:

	¬
1	0
0.7	0.3
0.3	0.7
0	0

∧	1	0.7	0.3	0
1	1	0.7	0.3	0
0.7	0.7	0.7	0.3	0
0.3	0.3	0.3	0.3	0
0	0	0	0	0

∨	1	0.7	0.3	0
1	1	1	1	1
0.7	1	0.7	0.7	0.7
0.3	1	0.7	0.3	0.3
0	1	0.7	0.3	0

→	1	0.7	0.3	0
1	1	0.7	0.3	0
0.7	1	1	0.6	0.3
0.3	1	1	1	0.7
0	1	1	1	1

La conjunción entre dos enunciados tiene el mismo grado de verdad que el enunciado componente más alejado de la verdad. La disyunción

conserva el grado del componente más próximo a la verdad. Una relación condicional entre dos enunciados alcanza un grado de verdad igual a la distancia entre el valor de (grado del antecedente – grado del consecuente) y 1. La negación se define mediante la noción conjuntista de complemento: la negación de un enunciado de grado n es 1-*n*.

Como vemos, la bivalencia ya no se sostiene y el tercero excluido no puede ser un teorema. Toda fórmula con la forma $\alpha \vee \neg\alpha$ tiene el grado de verdad de α o el de $\neg\alpha$ (el que esté más próximo a 1). Como ocurre en el intuicionismo, $\alpha \vee \neg\alpha$ tendrá un grado 1 sólo en el caso de que α o $\neg\alpha$ lo tenga. Por ejemplo, si el grado de verdad de α es 0.8, el grado de verdad de $\neg\alpha$ es de 0.2 y el de $\alpha \vee \neg\alpha$ es de 0.8, no de 1. El intuicionista no maneja grados de verdad, simplemente dice que si no ha sido probada la fórmula α o la fórmula $\neg\alpha$, no podemos afirmar $\alpha \vee \neg\alpha$.

Tampoco el condicional se puede definir ahora mediante alguna composición de negación y conjunción o bien negación y disyunción. $\alpha \vee \neg\alpha$ no equivale a $\alpha \rightarrow \alpha$. En general, $\alpha \rightarrow \beta$ no equivale ni a $\neg\alpha \vee \beta$ ni a $\neg (\alpha \wedge \neg\beta)$.

Sin embargo, la justificación del significado del condicional en este sistema sigue los pasos del significado del condicional clásico: un condicional cuyo antecedente es menos verdadero que el consecuente, es un condicional absolutamente verdadero. Si el antecedente se aproxima a la verdad más que el consecuente, el condicional estará más cerca de la falsedad cuanto mayor sea la distancia entre el valor del antecedente y el del consecuente. Un antecedente más próximo a la falsedad que el consecuente produce un condicional verdadero, mientras que un consecuente más próximo a la falsedad que el antecedente dará como resultado un condicional más próximo a la verdad cuanto menor es la distancia entre los valores de sus componentes. Así, un condicional, cuyo antecedente es prácticamente verdadero y el consecuente es prácticamente falso, será un condicional muy próximo a la falsedad. En cambio, un condicional con una distancia mínima entre antecedente y consecuente, será casi verdadero. Por ejemplo:

α	$\rightarrow$	β	
0.9	0.2	0.1	1 – (valor de α – valor de β)
0.9	0.9	0.8	
0.2	0.9	0.1	
0.1	1	0.2	

Si ahora tratamos de aplicar estas definiciones a la paradoja del montón, vemos que cada aplicación del Modus Ponens provoca una pérdida de grado de verdad en relación con las conclusiones parciales anteriores. A modo de ejemplo intuitivo, sea el valor de $P_n = 1$, el de $P_{n-1} = 0.9$, ..., el de $P_{n-(n-1)} = 0.1$ y el de $P_{n-n} = 0$.

P_n	1
$P_n \to P_{n-1}$	1 – (1 – 0.9) = 0.9
P_{n-1}	0.9
...	
$P_{n-(n-1)}$	0.1
$P_{n-(n-1)} \to P_{n-n}$	1 – (0.1 – 0) = 0.9
P_{n-n}	0

Cada condicional establecido en la prueba tiene un grado de verdad próximo a 1, sin embargo el condicional que ligaría la primera premisa con la penúltima conclusión parcial ($P_n \to P_{n-(n-1)}$) ya es prácticamente falso: 1 – (1 – 0.1), y el condicional entre la premisa y la conclusión ($P_n \to P_{n-n}$) es sencillamente falso: 1 – (1 – 0).

Pero aquí no hemos aplicado ninguna regla de cálculo, únicamente hemos calculado el grado de verdad de cada una de las fórmulas escritas atendiendo a la definición semántica que hemos dado del condicional y al hecho de que consideramos, de modo absoluto, verdadera la premisa y falsa la conclusión. En principio parece que P_{n-n}, por ejemplo, la obtenemos mediante la aplicación del Modus Ponens, pero hemos perdido grado de verdad en relación con cada una de las fórmulas sobre las cuales hemos aplicado la regla. Parece que esta regla del cálculo clásico no asegura la conservación de verdad en los argumentos que contienen predicados vagos. Cada condicional es casi verdadero, pues en cada caso la distancia (constante) entre el antecedente y el consecuente es mínima, pero ese "casi" es muy significativo cuando lo que queremos es extraer el consecuente del condicional y aprovechamos la fórmula obtenida para volver a aplicar un Modus Ponens.

Podríamos pensar que, una vez definido el condicional semánticamente, el Modus Ponens únicamente ha de ser coherente con dicha definición, de modo que su aplicación no produzca ninguna pérdida de grado de verdad *relativamente* al grado de verdad que tenía el consecuente en el condicional. Pero ¿qué valor tenía? Una vez que hemos comprobado que los condicionales de la cadena argumentativa tienen un grado de

verdad constante y muy próximo a 1, es fácil calcular el valor del consecuente de cada condicional conociendo el del antecedente y éste lo conocemos para la primera fórmula de la cadena argumentativa. Tomemos, por ejemplo, como valor constante de los condicionales: 0.99. El esquema argumentativo comenzaría así:

P_n	1
$P_n \rightarrow P_{n-1}$	$0.99 = 1 - (1 - x)$
P_{n-1}	$x = 0.99$
$P_{n-1} \rightarrow P_{n-2}$	$0.99 = 1 - (0.99 - y)$
P_{n-2}	$y = 0.98$
...	

En cualquier momento de la cadena deductiva tendríamos:

P_{n-k}	un número d
$P_{n-k} \rightarrow P_{(n-k)-1}$	$0.99 = 1 - (d - z)$
$P_{(n-k)-1}$	$z = 0.99 + d - 1$

Si aceptamos que no podemos pedir que el Modus Ponens nos permita obtener un grado de verdad superior al que tiene el consecuente del condicional antes de aplicar la regla, el argumento sería sintáctica y semánticamente correcto. ¿Qué es, entonces, lo que está fallando? Simplemente que tenemos un argumento deductivo correcto, cuyas premisas *no* tienen un grado de verdad igual a 1. De un conjunto de premisas, *no todas ellas verdaderas*, se sigue una conclusión falsa. De dos premisas *casi* verdaderas se sigue una conclusión absolutamente falsa, tras un número finito, pero suficientemente grande de aplicaciones del Modus Ponens.

Por otro lado, algunas otras leyes clásicas se pueden aplicar reiteradamente sobre enunciados vagos sin provocar ninguna paradoja, por ejemplo "ser mucho mayor que" es un predicado (diádico) vago que tiene la propiedad de la transitividad, en cambio el predicado "ser semejante a", que también es vago, no la tiene.

Parece que la lógica de la vaguedad no se puede considerar como una extensión conservadora de la lógica clásica, pues han dejado de valer principios tan importantes como el tercero excluido y la no contradicción: $\alpha \wedge \neg\alpha$ puede tener un grado de verdad distinto de 0, por ejemplo, cuando el valor de α es 0.5, el valor de $\alpha \wedge \neg\alpha$ también es 0.5, cuando el valor

de α es 0.8, el valor de $\alpha \wedge \neg\alpha$ es 0.2, etc. No obstante también podemos ver que en aquellos casos en los que las subfórmulas tienen un grado de verdad 1 o un grado 0, el significado de las constantes lógicas sigue siendo el clásico, de modo que podemos decir que se trata de una revisión de la lógica clásica, pero limitada a los enunciados vagos.

BIBLIOGRAFÍA

CARROLL, L. (1996): *El juego de la lógica*, Madrid, Alianza.

DALLA CHIARA, M. L. (1976): *Lógica*, Barcelona, Labor.

DEAÑO, A. (1980): *Las Concepciones de la Lógica*, Madrid, Taurus.

DUMMETT, M. (1990): *La verdad y otros enigmas*, México, FCE.

ENGEL, P. (1991): *The norm of Truth: An Introduction to the Philosophy of logic*, Toronto, Univ. of Toronto P. (trad. del francés: *La norme du vrai*, Ed. Gallimard, 1989).

FRAASSEN, B. C.,van (1987): *Semántica formal y lógica*, México, UNAM.

FREGE, G. (1972): *Conceptografía. Los fundamentos de la aritmética. Otros estudios filosóficos*, México, UNAM.

FREGE, G. (1973): *Fundamentos de la aritmética*, Barcelona, Laia.

FREGE, G. (1984a): *Estudios sobre semántica*, Barcelona, Ariel.

FREGE, G. (1984b): *Investigaciones lógicas*, Madrid, Tecnos.

GARCÍA SUÁREZ, A. (1997): *Modos de significar*, Madrid, Tecnos.

HAACK, S. (1991): *Filosofía de las lógicas*, Madrid, Cátedra.

HILBERT, D. y W. ACKERMANN (1975): *Elementos de lógica teórica*, Madrid, Tecnos.

HINTIKKA, J. (1976): *Lógica, juegos de lenguaje e información*, Madrid, Tecnos.

KANT, I. (2000): *Lógica. Un manual de lecciones. Acompañada de una selección de Reflexiones del legado de Kant*, Madrid, Akal.

KNEALE, W. y M. KNEALE (1972): *El desarrollo de la lógica*, Madrid, Tecnos.

KRIPKE, S. (1984): *Esbozo de una teoría de la verdad*, México, Instituto de Investigaciones Filosóficas.

KRIPKE, S. (1990): *Wittgenstein: Reglas y lenguaje privado*, México, UNAM.

NICOLÁS, J. A. y M. J. FRÁPOLI, (eds.) (1997): *Teorías de la verdad en el siglo XX*, Madrid, Tecnos.

ORAYEN, R. (1989): *Lógica, significado y ontología*, México, UNAM.

PAP, A. (1970): *Semántica y verdad necesaria*, México, FCE.

PUTNAM, H. (1984): *Filosofía de la lógica*, Madrid, Alianza.

QUESADA, D. (1985): *La lógica y su filosofía*, Barcelona, Barcanova.

QUINE, W.v.O. (1969): *Los métodos de la lógica*, Barcelona, Ariel, 1969

QUINE, W.v.O. (1984): *Desde un punto de vista lógico*, Barcelona, Orbis.

QUINE, W.v.O. (1998): *Filosofía de la lógica*, Madrid, Alianza.

QUINE, W.v.O. (2001): *Palabra y objeto*, Barcelona, Herder.

RUSSELL, B. (1948): *Los principios de la matemática*, Madrid, Espasa-Calpe.

RUSSELL, B. (1981): *Lógica y conocimiento*, Madrid, Taurus.

SMULLYAN, R. (1983): *¿Cómo se llama este libro?*, Madrid, Cátedra.

STRAWSON, P. F. (1969): *Introducción a la teoría lógica*, Buenos Aires, Nova.

TUGENDHAT, E. y U. WOLF (1997): *Propedéutica lógico-semántica*, Barcelona, Anthropos.

VALDÉS, L. M. (ed.) (1999): *La búsqueda del significado*, Madrid, Tecnos.

WITTGENSTEIN, L. (1987a): *Tractatus logico-philosophicus*, Madrid, Alianza.

WITTGENSTEIN, L. (1987b): *Observaciones sobre los fundamentos de la matemática*, Madrid, Alianza.

WITTGENSTEIN, L. (2002): *Investigaciones filosóficas*, México, UNAM.

VV. AA.(1995): *Lógica*, Madrid, Trotta.

SÍMBOLOS Y ABREVIATURAS UTILIZADAS

$\neg$	negación
$\vee$	disyunción
$\wedge$	conjunción
$\rightarrow$	condicional
$\equiv$	equivalencia
$\forall$	cuantificador universal
$\exists$	cuantificador existencial
$=$	identidad
$\Box$	operador de necesidad
$\Diamond$	operador de posibilidad
ssi	si y sólo si
Γ	un conjunto cualquiera de fórmulas (puede ser vacío)
α	una fórmula cualquiera
$\vDash$	consecuencia semántica
$\vdash$	consecuencia sintáctica
$\bot$	contradicción
$\varnothing$	conjunto vacío
$\subset$	inclusión de conjuntos
$\in$	pertenencia a un conjunto
{}	indicador de conjuntos
<>	indicador de n-tuplas ordenadas
$I(\alpha)$	interpretación de una fórmula α
S_I	secuencia de objetos en una interpretación I